

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2(26) 2020

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно–инновационный центр информационно-коммуникационных технологий.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Арипов М. М., Шадиметов Х. М., Нуралиев Ф. М.

Ответственный секретарь:

Мирзаев Н. М.

Редакционный совет:

Хамдамов Р. Х., Азамов А. А., Алимов И., Алоев Р. Д., Гасанов Э. Е. (Россия),
Загребина С. А. (Россия), Задорин А. И. (Россия), Игнатъев Н. А.,
Ильин В. П. (Россия), Исмагилов И. И. (Россия), Кабанихин С. И. (Россия),
Карачик В. В. (Россия), Маматов Н. С., Мухамедиева Д. Т., Нормуродов Ч. Б.,
Опанасенко В. Н. (Украина), Раджабов С. С., Расулов А. С.,
Самаль Д. И. (Беларусь), Старовойтов В. В. (Беларусь), Хаётов А. Р., Хужаев И. К.,
Хужаеров Б. Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М. Ш. (Таджикистан),
Шадиметов Х. М., Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США),
Min A. (Германия), Rasulev B. (США), Schaumburg H. (Германия), Singh D. (Южная
Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Узбекском Агентстве по печати и информации.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181–8460, eISSN 2181–046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(99871) 231-92-45.

E-mail: info@pvpm.uz.

Сайт: www.pvpm.uz.

Дизайн и компьютерная вёрстка:

Шарилов Х. Д., Расулов А. Б.

Отпечатано в типографии НИЦ ИКТ.

Подписано в печать 20.04.2020 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №2.

Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 2(26) 2020

The journal was established in 2015.

6 issues are published per year.

Founder:

Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Aripov M. M., Shadimetov Kh. M., Nuraliev F. M.

Executive Secretary:

Mirzaev N. M.

Editorial Council:

Khamdamov R. Kh., Azamov A. A., Alimov I., Aloev R. D., Gasanov E. E. (Russia),
Zagrebina S. A. (Russia), Zadorin A. I. (Russia), Ignatiev N. A., Ilyin V. P. (Russia),
Ismagilov I. I. (Russia), Kabanikhin S. I. (Russia), Karachik V. V. (Russia),
Mamatov N. S., Mukhamedieva D. T., Normurodov Ch. B., Opanasenko V. N. (Ukraine),
Radjabov S. S., Rasulo A. S., Samal D. I. (Belarus), Starovoitov V. V. (Belarus),
Khayotov A. R., Khujaev I. K., Khujayorov B. Kh., Chye En Un (Russia),
Shabozov M. Sh. (Tajikistan), Shadimetov Kh. M., Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA),
Mascagni M. (USA), Min A. (Germany), Rasulev B. (USA), Schaumburg H. (Germany),
Singh D. (South Korea), Singh M. (South Korea).

The journal is registered in the Uzbek Agency of Press and Information.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181–8460, eISSN 2181–046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(99871) 231-92-45.

E-mail: info@pvpm.uz.

Web: www.pvpm.uz.

Design and desktop publishing:

Sharipov Kh. D., Rasulov A. B.

SIC ICT Printing house.

Signed for print 20.04.2020.

Format 60x84 1/8. Order No. 2.

Print run 100 copies.

Содержание

Арипов М.М., Аланези Мешал

К численному моделированию решения задачи Коши для вырождающегося нелинейного параболического уравнения с переменной плотностью и поглощением 5

Хаётов А.Р., Расулов Р.Г., Сайфуллаева Н.Б.

Расширение квадратурной формулы Эйлера-Маклорена в пространстве Гильберта 12

Шадиметов Х. М., Далиев Б. С.

Коэффициенты оптимальных квадратурных формул для приближенного решения общего интегрального уравнения Абеля. 24

Хамраев А. Ю., Турсунова А. Х.

Полное описание поведения траекторий одного кубического оператора 32

Бурнашев В.Ф., Хужаёров Б.Х., Ахмедов О.

Моделирование кислотного воздействия на призабойную зону пласта нефтяных месторождений с карбонатными коллекторами с учетом трещиноватости породы 39

Худаяров Б.А., Комилова Х.М., Тураев Ф.Ж.

Численное моделирование вибраций композитных трубопроводов, транспортирующих двухфазный поток жидкости 58

Хамдамов Р.Х., Равшанов З.Н., Таштемирова Н.Н.

Моделирование и исследование основных параметров в процессе распространения соле-пылевых частиц в атмосфере 78

Марахтимов А.Р., Худайбергенов К.К., Игнатъев Н.А.

Повышение обобщающей способности нейронных сетей и селекция обучающих выборок 99

Мухамедиева Д.Т., Жураев З.

Классификация контента произведений 108

Садуллаева Ш. А., Хайдаров А. Т., Файзуллаева З.

Исследование свойств решений нелинейной системы уравнений с неоднородной плотностью и источником 118

Урунбаев Ж. Э.

Численное моделирование процесса кросс диффузии с нелокальными граничными условиями 133

Турсунов Н.Х.

Аргументация категорного описания сохранения целостности данных в базовой структуре облачных информационных систем 146

Contents

Aripov M.M., Alanezi Meshal

To the numerical modeling of solution the Cauchy problem to degenerate non-linear parabolic equation with variable density and absorption 5

Hayotov A.R., Rasulov R.G., Sayfullaeva N.B.

Extension of the Euler-Maclaurin quadrature formula in a Hilbert space 12

Shadimetov Kh. M., Daliev B. S.

Coefficients of optimal quadrature formulas for an approximate solution of the general Abel integral equation. 24

Khamroev A. Yu., Tursunova A. Kh

Full description of the behavior of trajectories of a cubic operator 32

Burnashev V.F., Khuzhayorov B.Kh., Akhmedov O.

Modeling of acid impacts on the bottom-hole zone of oil deposits with carbonate collectors tacking into account the fracturity of rocks 39

Khudayarov B.A., Komilova Kh.M., Turaev F.Zh.

Numerical modeling of vibrations composite pipelines transporting two-phase fluid flow 58

Khamdamov R.Kh., Ravshanov Z.N., Tashtemirova N.N.

Modeling and research of basic parameters in the process of distribution of salt-dust particles in the atmosphere 78

Marakhimov A.R., Khudaybergenov K.K., Ignatev N.A.

Improving the generalizing ability of neural networks and selecting training dataset 99

Mukhamedieva D.K., Jurayev Z.

Classification of content of works 108

Sadullaeva Sh. A., Khaydarov A. T., Fayzullayeva Z.

Investigation properties of solutions of a nonlinear system of equations with nonhomogeneous density and source 118

Urunbaev J. E.

Numerical modeling of the cross diffusion process whit non-local boundary conditions 133

Tursunov N.H.

The argumentation of the categorical description of the preservation of data integrity in the basic structure of cloud information systems 146

UDC 519.6

TO THE NUMERICAL MODELING OF SOLUTION THE CAUCHY PROBLEM TO DEGENERATE NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH VARIABLE DENSITY AND ABSORPTION

Aripov M.M., Alanezi Meshal

mirsaidaripov@mail.ru; m.alalati@hotmail.com

National University of Uzbekistan named after M.Ulugbek,

4, University str., Tashkent 100174, Uzbekistan

In this paper, we study the properties of self-similar solutions of the Cauchy problem to degenerate type double nonlinear parabolic equation with variable density and absorption. The property a FSP of solution of the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation is established. Based on self-similar analysis of solution the condition of Fujita type global solvability of the Cauchy problem for double nonlinear degenerate type parabolic equation with variable density is proved. The estimates for weak solution depending on grows of density, value of the numerical parameters is established. The critical cases are studied.

Keywords: finite speed, perturbation, global solutions, estimate solution, critical case, asymptotic behavior, numerical analysis.

Citation: Aripov M.M., Alanezi Meshal 2020. To the numerical modeling of solution the Cauchy problem to degenerate nonlinear parabolic equation with variable density and absorption. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26):5–11.

1 Introduction

Consider in $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ the following Cauchy problem:

$$|x^n|u_t = \operatorname{div}(u^{m-1}|\nabla u^k|^{p-2}\nabla u) - u^q \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in R^N \quad (2)$$

where n, m, k, p, q are the numerical parameters, $\nabla(\cdot) = \operatorname{grad}_x(\cdot)$, are the function $u = u(t, x) \geq 0$ are the solution.

It is clear that the equation (1) is degenerate. Therefore, it does not have classical solutions on the domain where $u(t, x) = 0$, $\nabla u = 0$. Therefore, in this case we consider a weak solution from class $0 \leq u(t, x)$, $\operatorname{div}(u^{m-1}|\nabla u^k|^{p-2}\nabla u) \in C(Q)$ and satisfying to the equation (1) in distribution sense [1].

Equation (1) are often used to modeling various physical phenomena, such as the diffusive process for biological species, the resistive diffusion phenomena in force-free magnetic fields, curve shortening flow, spreading of infectious disease and so on (see [2-8] and references therein).

The problem (1),(2) intensively studied by many authors [1-9]. In the work [2] study the properties of solutions to the following problem (1), (2) in one-dimension case:

$$\begin{aligned} \rho(x)u_t &= (u^{m-1}|u_x|^{\lambda-1}u_x)_x - c_0u^p, \quad x \in R, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in R, \end{aligned}$$

where $m > 1$, $\lambda \geq 1$, $p > 0$ and $c_0 > 0$ are constants, the nontrivial initial data $u_0(x)$ is nonnegative continuous and compactly supported, while the variable function $\rho(x)$ is positive, bounded and smooth enough.

Qualitative properties of solutions of a doubly nonlinear reaction-diffusion, self-similar profiles of solutions, global existence and blow-up solutions studied in [1-9, 12]. Asymptotic behavior of solutions of the nonlinear diffusion equation with absorption at a critical exponent considered in the works [18-19]. In [10, 11], the Cauchy problem for the following two equations with variable coefficients is studied:

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(u^{m-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \rho(x) u^\beta$$

and

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(u^{m-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + u^\beta, \quad x \in R^N, \quad t > 0.$$

Where $p > 1$, $m + p - 3 > 0$, $\beta > m + p - 2$, $\rho(x) = |x|^{-n}$ or $\rho(x) = (1 + |x|)^{-n}$. The authors showed that under some conditions for the parameters and for the initial data, any nontrivial solution of the Cauchy problem blows up in finite time. Moreover, the authors established a sharp universal estimate of the solution near the blow-up point.

Definition. We will call a weak solution to the problem (1)-(2) in $(0, T)$ with $0 < T \leq +\infty$ the function with property

$$0 \leq u, \quad u^{m-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u \in C(Q)$$

and satisfying to the equation (1) in distributed sense

$$\int_0^T \int_{R^N} \left(|x|^n u \frac{\partial \psi}{\partial t} - u^{m-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi - u^q \psi \right) dx dt = 0$$

for any $\psi \in C_0^\infty(R^N \times (0, T))$.

2 The self-similar equation

Firstly, we transform equation (1) to the following form

$$r^n u_t = r^{1-N} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} u^{m-1} \left| \frac{\partial u^k}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - u^q \quad (3)$$

Here $r = |x|$, N – dimension of space.

Consider following self-similar solution

$$u(t, r) = \bar{u}(t) f(\xi) \quad (4)$$

where $\bar{u}(t) = (T + t)^{-\alpha}$, $\xi = r(T + t)^{-\gamma}$, $T \geq 0$.

After substituting (4) to (1) it easy to check that

$$\alpha = -\frac{p}{n(m + k(p-2) - q) - p(q-1)}, \quad n(m + k(p-2) - q) - p(q-1) > 0$$

$$\gamma = \frac{m + k(p-2) - q}{n(m + k(p-2) - q) - p(q-1)}.$$

The function $f(\xi)$ satisfy to the following self-similar equation:

$$L_1(\xi) = \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} f^{m-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \gamma \xi^{n+1} \frac{df}{d\xi} + \alpha \xi^n f - f^q = 0 \quad (5)$$

In the following, we will consider nontrivial, nonnegative solutions of equation (5) satisfying the following conditions:

$$\begin{aligned} f(0) &= M, \quad M \in R^+ \\ f(d) &= 0, \quad 0 < d < \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

We look for the solution (5) the WKB solution in the Hardy form [17]:

$$f(\xi) = z(\varphi(\xi)). \quad (7)$$

The function $z(\varphi(\xi))$ is solution of the equation,

$$\frac{d}{d\varphi} \left(z^{m-1} \left| \frac{dz^k}{d\varphi} \right|^{p-2} \frac{dz}{d\varphi} \right) = \frac{dz}{d\varphi}. \quad (8)$$

Where the function $\varphi(\xi)$ to be choose. Then after substituting (7) to (5) and choosing $\varphi(\xi)$ as solution of the equation $(\varphi'_\xi)^p = -\gamma \xi^{n+1} \varphi'_\xi$, i.e. $(\varphi'_\xi)^{p-1} = -\gamma \xi^{n+1}$, we have $\varphi(\xi) = c_0 + (-\gamma)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p+n} \xi^{\frac{p+n}{p-1}}$, $\gamma = \frac{m+k(p-2)-q}{n(m+k(p-2)-q)-p(q-1)}$.

Remark. Case $n = -p$ we will call a critical case. In this case the function $\varphi(\xi)$ is solution of the equation $(\varphi'_\xi)^{p-1} = -\gamma \xi^{-p+1}$, i.e. $\varphi(\xi) = \ln \xi$.

Since equation (8) have particular solution

$$z(\varphi) = \varphi \begin{cases} (a - A^{-1}\varphi)^{\frac{p-1}{m-1+k(p-2)}}, & k(p-2) + m - 1 > 0, \quad (n)_+ = \max(0, n) \\ (a + A^{-1}\varphi)^{\frac{p-1}{m-1+k(p-2)}}, & \\ \exp(-\frac{1}{k^{p-2}}\varphi), & \varphi = \varphi(\xi) = \frac{p-1}{(p+n)k^{p-2}} \xi^{\frac{n+p}{p-1}} \end{cases}$$

$$\text{here } A = \left(\frac{m-1+k(p-2)}{p+n} \right)^{\frac{p-1}{m-1+k(p-2)}} (k^{2-p}|\gamma|)^{\frac{1}{m-1+k(p-2)}}$$

Therefore, the function

$$\bar{f}(\varphi) = \begin{cases} \left(a - A^{-1}\xi^{\frac{p+n}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{m-1+k(p-2)}}, & k(p-2) + m - 1 > 0, \quad (n)_+ = \max(0, n) \\ \left(a + A^{-1}\xi^{\frac{p+n}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{m-1+k(p-2)}}, & \\ \exp(-\frac{1}{k^{p-2}}\varphi), & \varphi = \varphi(\xi) = \frac{p-1}{(p+n)k^{p-2}} \xi^{\frac{n+p}{p-1}} \end{cases}$$

3 Main results

3.1 The slow diffusion case ($m+k(p-2)-1 > 0$)

Using constructed above function $\bar{f}(\xi)$ and the solution comparison method [1] we in position to establish explicit estimates of the solution of estimate of the Cauchy problem (1), (2).

Consider the function

$$\begin{aligned} u_+(t, x) \bar{u}(t) \bar{f}(\varphi), \quad \bar{f}(\xi) &= (a - A^{-1}\varphi)^{\frac{p-1}{m-1+k(p-2)}}, \quad k(p-2) + m - 1 > 0, \quad p \neq -n \\ \varphi(\xi) &= \gamma^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p+n} \xi^{\frac{p+n}{p-1}}, \quad \gamma = \frac{m+k(p-2)-q}{n(m+k(p-2)-q)-p(q-1)} > 0, \quad (n)_+ = \max(0, n) \end{aligned}$$

where $\bar{u}(t) = (T + t)^{-\alpha}$, $\xi = r(T + t)^{-\gamma}$, $T \geq 0$, α, γ are defined above numbers.

Theorem 1. Let $u(t, x)$ weak solution of the problem (1), (2), $m + k(p - 2) - 1 > 0$

$$q \geq m + k(p - 2) + \frac{p}{N + n}; \quad q > \frac{N}{N + n}; \quad p(N + n) > 0, \quad n \neq -p, \quad n + N > 0$$

$$u_0(x) \leq u_+(0, x), \quad x \in R^N$$

Then for the solution of the problem (1), (2) in Q the estimate

$$u(t, x) \leq u_+(t, x)$$

And for the front the following estimate

$$|x| \geq (aA)^{\frac{p-1}{p+n}} \gamma^{-1(p-1)} \frac{p-1}{p+n} (T+t)^\beta,$$

$$A = \left(\frac{m-1+k(p-2)}{p+n} \right)^{\frac{p-1}{m-1+k(p-2)}} (k^{2-p} |\gamma|)^{\frac{1}{m-1+k(p-2)}}$$

$$p \neq -n, \quad \gamma = \frac{m+k(p-2)-q}{n(m+k(p-2)-q)-p(q-1)} > 0,$$

hold.

Proof. Proof of this Theorem based on principle of comparison [1]. For comparison function we take the function $u_+(t, x)$ defined above. We note that according definition the function has a property

$$u_+(t, x) \equiv 0 \text{ when } |x| \geq (\alpha A)^{\frac{p-1}{p+n}} \gamma^{-1(p-1)} \frac{p-1}{p+n} (T+t)^\beta$$

Now to prove Theorem 1 we need to calculate $L(u_+(t, x))$ and show that $L(u_+(t, x)) < 0$. Indeed we will show that $L(\bar{f}(\xi)) < 0$ in $|\xi| < (aA)^{(p-1)/(p+n)}$.

Calculating

$$L_1(\bar{f}(\xi) = z(\varphi)) = \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} (\xi^{N-1} (\varphi'_\xi)^{p-1}) z^{m-1} \left| \frac{dz^k}{d\varphi} \right| \frac{dz}{d\varphi} + \alpha \xi^n z - z^q =$$

$$= \xi^n z (\alpha - \gamma(N+n)) - z^q = z (\xi^n (\alpha - \gamma(N+n)) - z^{q-1})$$

easy to see that

$$L_1 \bar{f} \leq 0, \text{ in } a - A^{-1} \xi^{\frac{p+n}{p-1}}, \text{ i.e. } |\xi| < (aA)^{(p-1)/(p+n)}, \text{ if } \alpha - \gamma(N+n) \leq 0, \text{ i.e.}$$

$$\frac{(N+n)(q - (m + k(p-2))) - p}{n(q - (m + k(p-2))) - p(1-q)} \geq 0,$$

$$q \geq m + k(p-2) + \frac{p}{N+n};$$

Applying the principle comparison we have $u(t, x) \leq u_+(t, x)$ in Q

The proof of the theorem 1 completed.

3.2 The critical case $m + k(p - 2) - 1 = 0$

Theorem 2. Let $u(t, x)$ solution of the problem (1), (2), $m + k(p - 2) - 1 = 0$,

$$q \geq 1 + \frac{p}{N+n}; \quad n \neq -p, \quad n + N > 0$$

$$u_0(x) \leq u_1(0, x), \quad x \in R^N.$$

Then for the solution of the problem (1), (2) in Q the estimate

$$u(t, x) \leq u_1(t, x) = (T+t)^{-\alpha} \exp \left(-\frac{(p-1)^2}{k^{p-2} p(p+n)} \xi^{\frac{n+p}{p-1}} \right), \quad \xi = |x|(T+t)^{-\beta}$$

hold.

This Theorem 2 consist the result Fujita (see [1]) on global solvability of the problem (1), (2) for the case $m + k(p - 2) - 1 = 0$, $k = 1$, $p = 2$.

3.3 Double critical case

The case $m + k(p - 2) - 1 = 0$, $n = -p$ we will call a double critical case.

Theorem 3. Let $u(t, x)$ solution of the problem (1), (2), $m + k(p - 2) - 1 = 0$, $n = -p$, $q \geq 1 + \frac{p}{N + n}$; $N > p$
 $u_0(x) \leq u_2(0, x)$, $x \in R^N \setminus \{0\}$.

Then for the solution of the problem (1), (2) in $Q \setminus \{0\}$ the estimate

$$u(t, x) \leq u_2(t, x) = (T + t)^{-\alpha} \exp\left(-\frac{(p-1)}{k^{p-2}p} \xi^{p/(p-1)}\right), \quad \xi = \ln|x|(T + t)^{-\beta}$$

hold.

Prof of theorem 2,3. Theorem 2,3 proved using the same approach as proving of Theorem 1. As functions for comparison is taken correspond functions $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$. After calculated $L(u_1(t, x))$, $L(u_1(t, x))$ will checked condition $L(u_1(t, x)) < 0$, $L(u_1(t, x)) < 0$.

4 Numerical analysis of solutions

For numerical solution it is important to choose an appropriate initial approximation that preserves its nonlinearity properties. On the basis of the above qualitative studies, we numerical calculations carried out. The numerical results show quick convergence of the iterative process to the solution of the Cauchy problem (1)-(2), due to the successful choice of the initial approximation. For numerical solution the generalization of the Samarskii-Sobol scheme [15] for numerical calculation wave type temperature is used. Programs for the numerical solution of nonlinear equation in divergence form developed in C#. For solution problem it is enough to enter the value of the numerical parameters and an initial approximation. At the end of the file automatically displays the calculated results in the visualization form. In the same place by running animation can trace the evolution of the process in time.

5 Conclusion

The property a finite speed of perturbation (FSP) and a space localization of the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation is established. Based on self-similar analysis of solution condition Fujita type global solvability of the Cauchy problem for double nonlinear degenerate type parabolic equation with variable density, estimates of weak solution and fronts (free boundary) is proved. Analysis of solutions and fronts shows that behavior of solutions and free boundary essentially depends on value of an exponential grows of density and an initial data. In all cases the property FSP solution have place. In critical cases the behavior of boundary is chanced. Results of computational experiments shows that the self-similar solutions are appropriate approximation for an initial approximation leading quickly to solution of the Cauchy problem.

References

- [1] Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyomov S.P., Mikhailov A.P. 1995. *Blow-up in quasilinear parabolic equations*. Berlin: Walter de Grueter. 535 p.

- [2] Xiang Zh., Mu Ch., Hu X. 2008. Support properties of solutions to a degenerate equation with absorption and variable density. *Nonlinear analysis*. 68:1940-1953.
- [3] Qi Y.M., Wang M.X. 2001. The self-similar profiles of solutions of generalized KPZ equation. *Pacific J. Math*. 201:223-240.
- [4] Wang M.X., Xie C.H. 2004. A degenerate strongly coupled quasilinear parabolic system not in divergence form. *Z. Angew. Math. Phys.* 55:741-755.
- [5] Lu H. 2009. Global existence and blow-up analysis for some degenerate and quasilinear parabolic systems. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 49:1-14.
- [6] Zhou W., Yao Z. 2010. Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with non-divergence form. *Acta Mathematica Scientia*. 30(5):1679-1686.
- [7] Chunhua J., Jingxue Y. 2013. Self-similar solutions for a class of non-divergence form equations. *Nonlinear Differ. Equ. Appl. Nodda*. 20(3):873-893.
- [8] Gao Y., Meng Q., Guo Y. 2016. Study of properties of solutions for quasilinear parabolic systems. *MATEC Web of Conferences*. 61(1):1-4.
- [9] Aripov M., Sadullaeva Sh.A. 2015. Qualitative Properties of Solutions of a Doubly Nonlinear Reaction-Diffusion System with a Source. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 3:1090-1099.
- [10] Martynenko A.V., Tedeev A.F. 2007. The Cauchy Problem for a Quasilinear Parabolic Equation with a Source and Inhomogeneous Density. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 47:238-248.
- [11] Martynenko A.V., Shramenko V.N. 2010. Estimate of solutions of the Cauchy Problem near the Time of Exacerbation for a Quasilinear Parabolic Equation with a Source and a Variable Density. *Nonlinear Boundary Value Problems*. 20:104-115.
- [12] Zhan H. 2012. The Self-Similar Solutions of a Diffusion Equation. *WSEAS Transaction on Mathematics*. 4(11):345-356.
- [13] Aripov M., Sadullaeva Sh. 2013. To properties of the equation of reaction diffusion with double nonlinearity and distributed parameters. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 3:13-22.
- [14] Aripov M. 2017. The Fujita and Secondary Type Critical Exponents in Nonlinear Parabolic Equations and Systems. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 9-24.
- [15] Samarskii A.A., Sobol I.M. 1963. Examples of numerical calculation of temperature waves. *Jour. Vychisl. Math and Math. Phis*. 3(4):702-719.
- [16] Chen X.F., Qi Y.W., Wang M.X. 2000. Self-similar singular parabolic equations with absorption. *Electronic J. Diff. Equ.* 67:1-22.
- [17] Aripov M. 1988. *Methods of standard equations for solving of nonlinear boundary value problems*. Tashkent: Fan. 138 p.
- [18] Vazquez J.L., Galaktionov V.A. 1989. Asymptotic behavior of solutions of the nonlinear diffusion equation with absorption at a critical exponent. *Report of the Academy of Sciences of USSR*. 6:5.
- [19] Aripov M., Mukimov A., Mirzayev B. 2019. To asymptotic of the solution of the heat conduction problem with double nonlinearity with absorption at a critical parameter. *Mathematics and Statistics*. 7(5):205-217.

Received March 6, 2020

УДК 519.6

К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ И ПОГЛОЩЕНИЕМ

Арипов М.М., Аланези Мешал

mirsaidaripov@mail.ru; m.alalati@hotmail.com

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, 4, Ташкент 100174, Узбекистан

В данной работе мы изучаем свойства автомодельных решений задачи Коши для вырожденного параболического уравнения с двойной нелинейностью и с переменными плотностью и поглощением. Установлено свойство конечной скорости распространения решения задачи Коши для нелинейного параболического уравнения. На основе автомодельного анализа решения доказано условие глобальной разрешимости типа Фуджиты задачи Коши для параболического уравнения с двойной нелинейностью и с переменными плотностью и поглощением. Установлены оценки для слабого решения в зависимости от роста плотности, значения числовых параметров. Также в статье исследуются критические случаи.

Ключевые слова: конечная скорость, возмущение, глобальные решения, оценочное решение, критический случай, асимптотическое поведение, численный анализ.

Цитирование: *Арипов М.М., Аланези Мешал* К численному моделированию решения задачи Коши для вырождающегося нелинейного параболического уравнения с переменной плотностью и поглощением // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 5–11.

UDC 519.644

EXTENSION OF THE EULER-MACLAURIN QUADRATURE FORMULA IN A HILBERT SPACE

^{1,2}*Hayotov A.R.*, ¹*Rasulov R.G.*, ³*Sayfullaeva N.B.*

hayotov@mail.ru; r.rasulov1990@mail.ru

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
81, M.Ulugbek str., Tashkent 100170, Uzbekistan

²National University of Uzbekistan named after M.Ulugbek,
4, University str., Tashkent 100174, Uzbekistan

³Bukhara state university,
11, M.Iqbol str., Bukhara 200114, Uzbekistan

In the paper we consider an extension problem of the Euler-Maclaurin quadrature formula in the Hilbert space $W_2^{(3,2)}$ by constructing an optimal quadrature formula. The optimal quadrature formula is obtained by minimizing the error of the formula by coefficients at values of the second derivative of a integrand. Using the discrete analogue of the operator $\frac{d^2}{dx^2} - 1$ the explicit formulas for the coefficients of the optimal quadrature formula are obtained. Furthermore, it is proved that the obtained quadrature formula is exact for any function of the set $\mathbf{F} = \text{span}\{1, x, e^x, e^{-x}\}$. Finally, the square of the norm of the error functional for the constructed quadrature formula is calculated. It is shown that the error of the obtained optimal quadrature formula is less than the error of the classical Euler-Maclaurin quadrature formula on the space $L_2^{(3)}$.

Keywords: optimal quadrature formula, Hilbert space, the error functional, S.L. Sobolev's method, discrete argument function, the order of convergence.

Citation: Hayotov A.R., Rasulov R.G., Sayfullaeva N.B. 2020. Extension of the Euler-Maclaurin quadrature formula in a Hilbert space. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26): 12–23.

1 Introduction

It is known, that quadrature and cubature formulas can be used for approximate evaluation of definite integrals. In addition and even more important, quadrature formulas provide a basic and important tool for the numerical solution of differential and integral equations. The theory of cubature formulas consists mainly of three branches dealing with exact formulas, formulas based on functional-analytic methods, and formulas based on probabilistic methods [22, 23]. In the functional-analytic methods the error between an integral and corresponding cubature sum is considered as a linear functional on a Banach space and it is estimated by the norm of the error functional in the conjugate Banach space. The norm of the error functional depends on coefficients and nodes of the formula. The problem of finding the minimum of the norm of the error functional by coefficients and by nodes is called *S.M.Nikol'skii problem*, and the obtained formula is called *the optimal formula in the sense of Nikol'skii* (see, for instance, [10]). Minimization of the norm of the error functional by coefficients when the nodes are fixed is called *Sard's problem*. And the obtained formula is called *the optimal formula in the sense of Sard*. First this problem was studied by A. Sard [12]. Solving these problems in different spaces of differentiable functions various type of optimal formulas of numerical integration are obtained.

In the present work we consider a problem of construction of an optimal quadrature formula with derivatives in the sense of Sard. There are several methods for constructing

the optimal quadrature formulas in the sense of Sard such as the spline method, the φ -function method (see e.g. [3], [14]) and the Sobolev method. It should be noted that the Sobolev method is based on using a discrete analogue of a linear differential operator (see e.g. [21–23]). In different spaces based on these methods, the Sard problem was studied by many authors, see, for example, [2–8, 12, 14, 16, 21–24] and references therein.

Among these formulas the Euler-Maclaurin type quadrature formulas are very important for numerical integration of differentiable functions and they are widely used in applications. In different spaces the optimality of the Euler-Maclaurin type quadrature and cubature formulas were studied, for instance, in works [4, 8, 9, 13, 18–20, 25].

The Euler-Maclaurin quadrature formulas can be viewed as well as an extension of the trapezoidal rule by the inclusion of correction terms. It should be noted that in applications and in solution of practical problems numerical integration formulas are interesting for functions with small smoothness.

The present paper is also devoted to extension of the trapezoidal rule and to construction of the optimal quadrature formulas in the sense of Sard.

Consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] \varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_1[\beta] \varphi'(h\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_2[\beta] \varphi''(h\beta) \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} C_0[0] &= \frac{h}{2}, \\ C_0[\beta] &= h, \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ C_0[N] &= \frac{h}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

and

$$\begin{aligned} C_1[0] &= \frac{h^2}{12}, \\ C_1[\beta] &= 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ C_1[N] &= -\frac{h^2}{12}, \end{aligned} \quad (3)$$

$C_2[\beta]$ are unknown coefficients of the quadrature formula (1), $h = \frac{1}{N}$, N is a natural number.

We suppose that integrands φ belong to $W_2^{(3,2)}$, where by $W_2^{(3,2)}$ is the class of all functions φ defined on $[0, 1]$ which possess an absolutely continuous second derivative and whose third derivative is in $L_2(0, 1)$ (see [17]). The class $W_2^{(3,2)}$ under the pseudo-inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_2^{(3,2)}} = \int_0^1 (\varphi'''(x) + \varphi''(x))(\psi'''(x) + \psi''(x)) dx$$

is a Hilbert if we identify functions that differ by a linear combination of 1, x and e^{-x} (see, for example, [1, 17]). The space $W_2^{(3,2)}$ is equipped by the corresponding norm

$$\|\varphi\|_{W_2^{(3,2)}} = \left[\int_0^1 (\varphi'''(x) + \varphi''(x))^2 dx \right]^{1/2}.$$

The error of the formula (1) is the difference

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N (C_0[\beta] \varphi(h\beta) + C_1[\beta] \varphi'(h\beta)) + C_2[\beta] \varphi''(h\beta) \quad (4)$$

and it defines a functional

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] \delta(x - h\beta) + \sum_{\beta=0}^N C_1[\beta] \delta'(x - h\beta) - \sum_{\beta=0}^N C_2[\beta] \delta''(x - h\beta), \quad (5)$$

which is called *the error functional* of the quadrature formula (1), where $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the indicator of the interval $[0, 1]$, δ is Dirac's delta-function. The value of the error functional ℓ at a function φ is calculated as $(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx$ (see [22]) and ℓ is a linear functional in $W_2^{(3,2)*}$ space, where $W_2^{(3,2)*}$ is the conjugate space to the space $W_2^{(3,2)}$.

Since the error functional (5) is defined on the space $W_2^{(3,2)}$ it is necessary to impose the following conditions for the error functional ℓ

$$(\ell, 1) := 1 - \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] = 0, \quad (6)$$

$$(\ell, x) := \frac{1}{2} - \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta](h\beta) - \sum_{\beta=0}^N C_1[\beta] = 0, \quad (7)$$

$$(\ell, e^{-x}) := \int_0^1 e^{-x} dx - \sum_{\beta=0}^N (C_0[\beta]e^{-h\beta} - C_1[\beta]e^{-h\beta} + C_2[\beta]e^{-h\beta}) = 0. \quad (8)$$

The equations (6)-(8) show that the quadrature formula (1) is exact to the functions 1, x and e^{-x} . One can see that the coefficients $C_0[\beta]$ and $C_1[\beta]$, defined by equalities (2) and (3), satisfy equations (6) and (7). Therefore for unknown coefficients $C_2[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$, we have only equation (8).

The absolute value of the error (4) is estimated from above by the norm

$$\|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}} = \sup_{\varphi, \|\varphi\|_{W_2^{(3,2)}} \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(3,2)}}}$$

of the error functional ℓ as follows

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{W_2^{(3,2)}} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}}.$$

Furthermore, one can see from (4) that the norm of the error functional (5) depends on coefficients $C_2[\beta]$.

Thus, in order to construct *an optimal quadrature formula* of the form (1) in the sense of Sard we have to solve the following problem.

Problem 1. Find the minimum for the norm of the error functional (5) by coefficients $C_2[\beta]$, i.e.

$$\|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}} = \inf_{C_2[\beta]} \|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}}. \quad (9)$$

The coefficients satisfying equality (9) are called *optimal coefficients* and are denoted as $\hat{C}_2[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$.

For solving Problem 1, first, we find an expression for the norm of the error functional (5) and next, we calculate it's minimum by coefficients $C_2[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$.

2 Coefficients of the optimal quadrature formula

2.1 The norm of the error functional ℓ

To get a representation of the norm of the error functional (5) in the space $W_2^{(3,2)}(0,1)$ we use *the extremal function* for this functional (5) which satisfies the following equality (see [22, 23]):

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}} \cdot \|\psi_\ell\|_{W_2^{(3,2)}}.$$

From Theorem 2.1 of the work [17] for the extremal function ψ_ℓ of the error functional ℓ in the space $W_2^{(3,2)}$ we get the following formula

$$\psi_\ell(x) = -\ell(x) * G_3(x) + P_1(x) + de^{-x}, \quad (10)$$

where

$$G_3(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{x^3}{6} - x \right), \quad (11)$$

$P_1(x) = p_1x + p_0$ is a linear polynomial and d is a real number.

Furthermore, from the results of [17] we have $\|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}} = \|\psi_\ell\|_{W_2^{(3,2)}}$ and

$$\|\ell\|_{W_2^{(3,2)*}}^2 = (\ell, \psi_\ell). \quad (12)$$

Hence, taking into account equalities (5) and (10) we come to the following expression for the norm of ℓ :

$$\begin{aligned} \|\ell\|^2 = (\ell, \psi_\ell) = & - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_2[\beta] C_2[\gamma] G_1(h\beta - h\gamma) \\ & + 2 \sum_{\beta=0}^N C_2[\beta] \left(\int_0^1 G_2(x - h\beta) dx - \sum_{\gamma=0}^N C_0[\gamma] G_2(h\beta - h\gamma) + \sum_{\gamma=0}^N C_1[\gamma] G_2'(h\beta - h\gamma) \right) \\ & - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_0[\beta] C_0[\gamma] G_3(h\beta - h\gamma) + 2 \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_0[\beta] C_1[\gamma] G_3'(h\beta - h\gamma) \\ & + \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_1[\beta] C_1[\gamma] G_2(h\beta - h\gamma) + 2 \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] \int_0^1 G_3(x - h\beta) dx \\ & - 2 \sum_{\beta=0}^N C_1[\beta] \int_0^1 G_3'(x - h\beta) dx - \int_0^1 \int_0^1 G_3(x - y) dx dy, \end{aligned} \quad (13)$$

where $G_3(x)$ is defined by (11),

$$G_1(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \quad \text{and} \quad G_2(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \right). \quad (14)$$

Thus, we have calculated the norm of the error functional (5).

In the next section we find the minimum of the expression (13) by coefficients $C_2[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$, under the condition (8).

2.2 The minimization of the norm (13)

Here we solve the problem of finding the minimum of (13) by coefficients $C_2[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$ under the condition (8). For this we use the Lagrange method.

Consider the following function

$$\Psi(C_2[0], C_2[1], \dots, C_2[N], d) = \|\ell\|^2 + 2d(\ell, e^{-x}).$$

Equating to zero the partial derivatives of the function Ψ by $C_2[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$ and d we get the following system of $N + 2$ linear equations

$$\sum_{\gamma=0}^N C_2[\gamma] G_1(h\beta - h\gamma) + de^{-h\beta} = F(h\beta), \quad \beta = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_2[\gamma] e^{-h\gamma} = g, \quad (16)$$

where

$$F(h\beta) = \int_0^1 G_2(x - h\beta) dx - \sum_{\gamma=0}^N C_0[\gamma] G_2(h\beta - h\gamma) + \sum_{\gamma=0}^N C_1[\gamma] G_2'(h\beta - h\gamma), \quad (17)$$

$$g = 1 - e^{-1} - \sum_{\gamma=0}^N C_0[\gamma] e^{-h\gamma} + \sum_{\gamma=0}^N C_1[\gamma] e^{-h\gamma}. \quad (18)$$

In this system $C_2[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$ and d are unknowns, that is, the above system has $N + 2$ unknowns and $N + 2$ linear equations. This system has only solution for every fixed natural N and this solution gives the minimum to the norm (13).

Further, we find an exact solution of the system (15)-(16).

2.3 The solution of the system (15)-(16)

In this section we solve the system (15)-(16). Here we use the concept of discrete argument functions (or functions of discrete argument) and operations on them following by S.L.Sobolev [22, 23].

Suppose φ and ψ are real-valued functions of real variable x and are defined in the real line $\mathbb{R}$. Let h be a small positive number.

A function $\varphi(h\beta)$ is called a *discrete argument function* if it is defined on some of integer values of β . The *inner product* of two discrete argument functions $\varphi(h\beta)$ and $\psi(h\beta)$ is defined as the following number

$$[\varphi(h\beta), \psi(h\beta)] = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \varphi(h\beta) \cdot \psi(h\beta),$$

if the series on the right hand side of the last equality converges absolutely.

The *convolution* of two discrete argument functions $\varphi(h\beta)$ and $\psi(h\beta)$ is the following inner product

$$\varphi(h\beta) * \psi(h\beta) = [\varphi(h\gamma), \psi(h\beta - h\gamma)] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \varphi(h\gamma) \cdot \psi(h\beta - h\gamma)$$

Moreover, we use the following discrete analogue of the differential operator $\frac{d^2}{dx^2} - 1$ constructed in the work [15].

The discrete analogue $D_1(h\beta)$ of the differential operator $\frac{d^2}{dx^2} - 1$ satisfying the equation

$$D_1(h\beta) * G_1(h\beta) = \delta_d(h\beta)$$

has the form

$$D_1(h\beta) = \frac{1}{1 - e^{2h}} \begin{cases} 0, & |\beta| \geq 2, \\ -2e^h, & |\beta| = 1, \\ 2(1 + e^{2h}), & \beta = 0, \end{cases} \quad (19)$$

where $G_1(h\beta) = \frac{\text{sgn}(h\beta)}{2} \left(\frac{e^{h\beta} - e^{-h\beta}}{2} \right)$ and $\delta_d(h\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases}$

Furthermore, $D_1(h\beta)$ has the following properties

$$D_1(h\beta) * e^{h\beta} = 0 \text{ and } D_1(h\beta) * e^{-h\beta} = 0. \quad (20)$$

Now suppose that $C_2[\beta] = 0$ when $\beta = -1, -2, \dots$ and $\beta = N + 1, N + 2, \dots$. Then we can rewrite the system (15)-(16) in the following convolution form

$$C_2[\beta] * G_1(h\beta - h\gamma) + de^{-h\beta} = F(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (21)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_2[\gamma] e^{-h\gamma} = g \quad (22)$$

where

$$F(h\beta) = \left((e^{h\beta-1} + e^{-h\beta}) \cdot \frac{e+1}{4} - 1 \right) \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h}{e^h - 1} \right), \quad (23)$$

and

$$g = \frac{e-1}{e} \cdot \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h}{e^h - 1} \right) \quad (24)$$

which are obtained by calculating the right hand sides of (17) and (18), respectively.

We have the following main result of the work.

Theorem 1. *The coefficients of the optimal quadrature formula in the form (1) in the space $W_2^{(3,2)}(0,1)$ have the following forms:*

$$\begin{aligned} \mathring{C}_2[0] &= \frac{e^h - 1}{e^h + 1} \left(\frac{h^2}{12} + 1 \right) - \frac{h}{2}, \\ \mathring{C}_2[\beta] &= \frac{e^h - 1}{e^h + 1} \left(\frac{h^2}{6} + 2 \right) - h, \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ \mathring{C}_2[N] &= \frac{e^h - 1}{e^h + 1} \left(\frac{h^2}{12} + 1 \right) - \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Proof. We denote the left hand side of (21) by

$$u(h\beta) = C_2[\beta] * G_1(h\beta) + de^{-h\beta}. \quad (26)$$

Then we get

$$C_2[\beta] = D_1(h\beta) * u(h\beta). \quad (27)$$

Indeed, if the discrete argument function $u(h\beta)$ is defined at all integer values of β , then using (19) and (27), and taking (20) into account, we get

$$\begin{aligned} D_1(h\beta) * u(h\beta) &= D_1(h\beta) * (G_1(h\beta) * C_2[\beta]) + D_1(h\beta) * (de^{-h\beta}) \\ &= C_2[\beta] * (D_1(h\beta) * G_1(h\beta)) \\ &= C_2[\beta] * \delta_d(h\beta) \\ &= C_2[\beta]. \end{aligned}$$

Hence, in order to find $C_2[\beta]$ the function $u(h\beta)$ must be found at all integer values of β .

From (21) we get that

$$u(h\beta) = F(h\beta) \text{ for } \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (28)$$

where $F(h\beta)$ is defined by (23).

Next we find $u(h\beta)$ for $\beta = -1, -2, \dots$ and $\beta = N + 1, N + 2, \dots$

For the cases $\beta = -1, -2, \dots$, from (26), using (22), we get

$$u(h\beta) = -\frac{1}{4}e^{h\beta}g + e^{-h\beta}\frac{1}{4}\sum_{\gamma=0}^N C_2[\gamma]e^{h\gamma} + de^{-h\beta}. \quad (29)$$

Similarly, for the cases $\beta = N + 1, N + 2, \dots$, we have

$$u(h\beta) = \frac{1}{4}e^{h\beta}g - e^{-h\beta}\frac{1}{4}\sum_{\gamma=0}^N C_2[\gamma]e^{h\gamma} + de^{-h\beta}. \quad (30)$$

Combining (28), (29) and (30), denoting $D = \frac{1}{4}\sum_{\gamma=0}^N C_2[\gamma]e^{h\gamma}$, we get the following

$$u(h\beta) = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^{h\beta}g + (d + D)e^{-h\beta}, & \beta \leq 0, \\ F(h\beta), & 0 \leq \beta \leq N, \\ \frac{1}{4}e^{h\beta}g + (d - D)e^{-h\beta}, & \beta \geq N. \end{cases} \quad (31)$$

In the last equation d and D are unknowns. To find these unknowns we use the values of $u(h\beta)$ at points $\beta = 0$ and $\beta = N$. Then we get the following system of equations

$$\begin{aligned} d + D - \frac{1}{4}g &= F(0) \text{ for } \beta = 0, \\ d - D - \frac{e^2}{4}g &= eF(1) \text{ for } \beta = N. \end{aligned}$$

Solving this system we get

$$\begin{aligned} d &= 0, \\ D &= \frac{e-1}{4} \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h}{e^h-1} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

As a result, from (27) for $\beta = 0, 1, \dots, N$, using (19) and (31) with (32), by direct calculation we get (25). Theorem 1 is proved.

Thus, we have found the optimal coefficients $\mathring{C}_2[\beta]$, $\beta = 0, 1, 2, \dots, N$ satisfying the equality (9).

Remark 1. It is easy to check that the optimal quadrature formula of the form (1) with coefficients (2), (3) and (25) is also exact for function e^x . As a result we get that the optimal quadrature formula (1) which has coefficients (2), (3) and (25) is exact for any linear combinations of functions 1, x , e^{-x} and e^x .

Further, in the next section we calculate the norm of the optimal error functional $\mathring{\ell}$.

3 The norm of the error functional $\mathring{\ell}$ of the optimal quadrature formula (1)

In this section, we study the order of approximation of the optimal quadrature formula (1) with coefficients (2), (3) and (25). That is we calculate the square of the norm of the error functional (13) for the optimal quadrature formula.

The following holds.

Theorem 2. In the space $W_2^{(3,2)}(0,1)$ the square of the norm of the error functional (5) of the optimal quadrature formula (1) with the coefficients (2), (3) and (25) has the form

$$\begin{aligned}\|\dot{\ell}\|_{W_2^{(3,2)*}}^2 &= \frac{1}{720}h^4 - \frac{1}{72}h^3 + \frac{1}{12}h^2 - \frac{1}{3}h + 1 + \frac{h^3}{36} \frac{1}{e^h + 1} + \frac{2h}{3(e^h + 1)} - \frac{2}{h} \frac{e^h - 1}{e^h + 1} \\ &= \frac{1}{30240}h^6 - \frac{1}{362880}h^8 + O(h^9)\end{aligned}\quad (33)$$

Proof. We rewrite the expression (13) as follows

$$\begin{aligned}\|\ell\|^2 &= - \sum_{\beta=0}^N \dot{C}_2[\beta] \left(\sum_{\gamma=0}^N \dot{C}_2[\gamma] G_1(h\beta - h\gamma) - F(h\beta) \right) + \sum_{\gamma=0}^N \dot{C}_2[\gamma] F(h\beta) - \\ &\quad - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_0[\beta] C_0[\gamma] G_3(h\beta - h\gamma) + 2 \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_0[\beta] C_1[\gamma] G'_3(h\beta - h\gamma) \\ &\quad + \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_1[\beta] C_1[\gamma] G_2(h\beta - h\gamma) + 2 \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] \int_0^1 G_3(x - h\beta) dx \\ &\quad - 2 \sum_{\beta=0}^N C_1[\beta] \int_0^1 G'_3(x - h\beta) dx - \int_0^1 \int_0^1 G_3(x - y) dx dy,\end{aligned}$$

where $G_1(x)$, $G_2(x)$ and $G_3(x)$ are defined by (14) and (11), $F(h\beta)$ is defined by (23).

Hence, using (32) we get

$$\|\dot{\ell}\|_{W_2^{(3,2)*}}^2 = A_1 - A_2 + 2A_3 + A_4 + 2A_5 - 2A_6 - A_7, \quad (34)$$

where

$$\begin{aligned}A_1 &= \sum_{\beta=0}^N \dot{C}_2[\beta] F(h\beta), & A_2 &= \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_0[\beta] C_0[\gamma] G_3(h\beta - h\gamma), \\ A_3 &= \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_0[\beta] C_1[\gamma] G'_3(h\beta - h\gamma), & A_4 &= \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_1[\beta] C_1[\gamma] G_2(h\beta - h\gamma), \\ A_5 &= \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] \int_0^1 G_3(x - h\beta) dx, & A_6 &= \sum_{\beta=0}^N C_1[\beta] \int_0^1 G'_3(x - h\beta) dx, \\ A_7 &= \int_0^1 \int_0^1 G_3(x - y) dx dy.\end{aligned}$$

Using (2), (3) and (25) we have

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] &= 1, & \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] (h\beta) &= \frac{1}{2}, & \sum_{\beta=0}^N C_0[\beta] (h\beta)^2 &= \frac{h^2}{6} + \frac{1}{3}, \\ \sum_{\beta=0}^N \dot{C}_2[\beta] e^{-h\beta} &= \frac{e-1}{e} \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h}{e^h-1} \right), & \sum_{\beta=0}^N \dot{C}_2[\beta] e^{h\beta} &= (e-1) \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h}{e^h-1} \right).\end{aligned}\quad (35)$$

Taking (35) into account for $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ and A_7 we get

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{e^2 - 1}{2e} \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h}{e^h - 1}\right)^2 - \left(\frac{2(e^h - 1)}{e^h + 1} \left(\frac{h}{12} + \frac{1}{h}\right) - 1\right) \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h}{e^h - 1}\right), \\
A_2 &= \frac{h^2(e^h + 1)^2(e^2 - 1)}{8e(e^h - 1)^2} - \frac{h^4}{180} - \frac{h^2}{9} - \frac{h(e^h + 1)}{2(e^h - 1)} - \frac{7}{40}, \\
A_3 &= -\frac{h^3}{48}(e^{-1} + e) + \left(\frac{h^3}{24}e + \frac{h^3}{24}\right) \frac{e^h - e^{-1}}{e^h - 1} - \frac{1}{144}h^4 - \frac{1}{24}h^3 - \frac{7}{72}h^2, \\
A_4 &= \frac{h^4}{288e}(1 - e^2) + \frac{h^4}{144}, \\
A_5 &= \frac{h(e^h + 1)(e^2 - 1)}{4e(e^h - 1)} + \frac{h^4}{720} - \frac{7}{72}h^2 - \frac{47}{40}, \\
A_6 &= \frac{h^2}{24}(e - e^{-1}) - \frac{7}{72}h^2, \\
A_7 &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{47}{40}.
\end{aligned}$$

Using the last equalities, from (34) we obtain (33). The Theorem 2 is proved

Remark 2. It should be noted that optimality of the classical Euler-Maclaurin was proved and the error of this quadrature formula was calculated in $L_2^{(m)}$, where $L_2^{(m)}$ is the space of functions which are square integrable with m -th generalized derivative (see, for instance, [4, 13, 18]). In particular, when $m = 3$ from Corollary 5.1 of the work [18] we get optimality of the Euler-Maclaurin formula

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong h \left(\frac{1}{2} \varphi(0) + \varphi(h) + \varphi(2h) + \dots + \varphi(h(N-1)) + \frac{1}{2} \varphi(1) \right) + \frac{h^2}{12} (\varphi'(0) - \varphi'(1)) \quad (36)$$

in the space $L_2^{(3)}(0, 1)$. Furthermore for the square of the norm of the error functional the following is valid

$$\|\ell\|_{L_2^{(3)*}(0,1)}^2 = \frac{h^6}{30240}. \quad (37)$$

Comparison of equalities (33) and (37) shows that the error of the optimal quadrature formula of the form (1) on the space $W_2^{(3,2)}(0, 1)$ is less than the error of the Euler-Maclaurin quadrature formula (36) on the space $L_2^{(3)}(0, 1)$.

4 Conclusion

In the present paper we have constructed a new optimal quadrature formula with derivatives in the Hilbert space $W_2^{(3,2)}$, using the discrete analogue of the operator $\frac{d^2}{dx^2} - 1$. The obtained quadrature formula is exact for any function of the set $\mathbf{F} = \text{span}\{1, x, e^x, e^{-x}\}$. Moreover, we have calculated the square of the norm of the error functional for the constructed optimal quadrature formula. We showed that the error of the obtained optimal quadrature formula is less than the error of the classical Euler-Maclaurin quadrature formula on the space $L_2^{(3)}$.

References

- [1] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. 1967. *The Theory of Splines and Their Applications*. Academic Press, New York - London.
- [2] Goossens, M., F. Mittelbach, and A. Samarin. 1994. *The L^AT_EX companion*. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley. 528 p.

- [3] Babuška I. 1963. Optimal quadrature formulas (Russian) *Akad. Nauk SSSR*. [Acad. Science of the USSR.] 149, 227–229.
- [4] Blaga P., Coman Gh. 2007. *Some problems on optimal quadrature*. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 52, no. 4, 21–44.
- [5] Catinaş T., Coman Gh. 2006. Optimal quadrature formulas based on the φ -function method. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 51, no. 1, 49–64.
- [6] Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M. 2011. On an optimal quadrature formula in the sense of Sard. *Numerical Algorithms* v. 57, no. 4, (2011) 487–510.
- [7] Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M. 2015. Optimal quadratures in the sense of Sard in a Hilbert space. *Applied Mathematics and Computation*. 259, 637–653.
- [8] Köhler P. 1988. On the weights of Sard's quadrature formulas. *Calcolo*. 25 (1988) 169–186.
- [9] Lanzara F. 2000. On optimal quadrature formulae. *J. Ineq. Appl.* 5, 201–225.
- [10] Micchelli C.A. 1974. Best quadrature formulas at equally spaced nodes. *J. Math. Anal. Appl.* 47, 232–249.
- [11] Nikol'skii S.M. 1988. Kvadrurnie formula [Quadrature Formulas]. *Nauka, Moskva*. [Nauka, Moscow] (in Russian)
- [12] Sard A. 1949. Best approximate integration formulas; best approximation formulas. *Amer. J. Math.* 71, 80–91.
- [13] Schoenberg I.J. 1965. On monosplines of least deviation and best quadrature formulae. *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. B Numer. Anal.* 2, 144–170.
- [14] Schoenberg I.J., Silliman S.D. 1974. On semicardinal quadrature formulae. *Math. Comp.* 28, 483–497.
- [15] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. 2004. Construction of the discrete analogue of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$. *Uzbek mathematical journal*. no.2, pp. 85–95.
- [16] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. 2011. Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0, 1)$ space. *J. Comput. Appl. Math.* 235, 1114–1128.
- [17] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. 2014. Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m, m-1)}$ space. *Calcolo*. 51, 211–243.
- [18] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. 2013. On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}(0, 1)$. *J. Comput. Appl. Math.* 243, 91–112.
- [19] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. 2016. Optimal quadrature formulas of Euler-Maclaurin type. *Applied Mathematics and Computation*. 276, 340–355.
- [20] Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A. 2018. Optimal formulas of numerical integration with derivatives in Sobolev space. *Journal of Siberian Federal University. Math. and Phys.* 11 (6) 764–775.
- [21] Sobolev S.L. 2006. The coefficients of optimal quadrature formulas. *Selected Works of S.L. Sobolev, Springer*. 561–566.
- [22] Sobolev S.L. 1974. Vvedeniye v teoriyu kubaturnix formul [Introduction to the Theory of Cubature Formulas]. *Nauka, Moskva*. [Nauka, Moscow] (in Russian)
- [23] Sobolev S.L., Vaskevich V.L. 1997. The Theory of Cubature Formulas. *Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht*.
- [24] Zagirova F.Ya. 1982. O postroenie kvadrurnix formul s ravnopravnimi uzlamy [On construction of optimal quadrature formulas with equal spaced nodes]. (in Russian). Novosibirsk. *Institut matematiki CO AN SSSR* [Institute of Mathematics SD of AS of USSR]. Preprint No. 25, p 28

- [25] Zhensikbaev A.A. 1981. Monosplayn minimalnoy normi i luchshie kvadrturnie formul [Monosplines of minimal norm and the best quadrature formulas]. *Uspehi Mat Nauk*[Uspekhi Mat. Nauk] 36: 107–159.

Received March 13, 2020

УДК 519.644

РАСШИРЕНИЕ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА-МАКЛОРЕНА В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

^{1,2}Хаётов А.Р., ¹Расулов Р.Г., ³Сайфуллаева Н.Б.

hayotov@mail.ru; r.rasulov1990@mail.ru

¹Институт математики им. В.И.Романовского Академии наук Узбекистана,
ул. М.Улугбека, 81, Ташкент 100174, Узбекистан

²Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, 4, Ташкент 100174, Узбекистан

³Бухарский государственный университет,
ул. М.Икбола, 11, Бухара, 200114, Узбекистан

В статье рассматривается задача расширения квадратурной формулы Эйлера-Маклорена в гильбертовом пространстве $W_2^{(3,2)}$ путем построения оптимальной квадратурной формулы. Оптимальная квадратурная формула получается путем минимизации погрешности формулы с помощью коэффициентов при значениях второй производной подынтегрального выражения. Используя дискретный аналог оператора $\frac{d^2}{dx^2} - 1$, получены явные формулы для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы. Кроме того, доказано, что полученная квадратурная формула является точной для любой функции множества $\mathbf{F} = \text{span}\{1, x, e^x, e^{-x}\}$. Наконец, вычислен квадрат нормы функционала погрешности для построенной квадратурной формулы. Показано, что погрешность полученной оптимальной квадратурной формулы меньше погрешности классической квадратурной формулы Эйлера-Маклорена в пространстве $L_2^{(3)}$.

Ключевые слова: оптимальная квадратурная формула, пространство гильберта, функционал погрешности, метод Соболева, функция дискретного аргумента, порядок сходимости.

Цитирование: Хаётов А.Р., Расулов Р.Г., Сайфуллаева Н.Б. Расширение квадратурной формулы Эйлера-Маклорена в пространстве Гильберта // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 12–23.

Литература

- [1] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. The Theory of Splines and Their Applications. Academic Press, New York - London. 1967.
- [2] Babuška I. Optimal quadrature formulas // Acad. Science of the USSR, 1963. № 149. С. 227–229.
- [3] Blaga P., Coman Gh. Some problems on optimal quadrature // Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math, 2007. v. 52, № 4. С. 21–44.

- [4] *Catinaş T., Coman Gh.* Optimal quadrature formulas based on the φ -function method // Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math, 2006. 51, № 1, С. 49–64.
- [5] *Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M.* On an optimal quadrature formula in the sense of Sard // Numerical Algorithms, 2011. v. 57, №4. С. 487–510.
- [6] *Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M.* Optimal quadratures in the sense of Sard in a Hilbert space // Applied Mathematics and Computation, 2015. №259, С. 637–653.
- [7] *Köhler P.* On the weights of Sard's quadrature formulas // Calcolo, 1988. №25 С. 169–186.
- [8] *Lanzara F.* On optimal quadrature formulae // J. Ineq. Appl, 2000. №5. С. 201–225.
- [9] *Micchelli C.A.* Best quadrature formulas at equally spaced nodes // J. Math. Anal. Appl. 1974. №47. С. 232–249.
- [10] *Никольский С.М.* Квадратурные формулы // Наука, Москва. 1988.(in Russian)
- [11] *Женсикбаев А.А.* Моносплайны минимальной нормы и лучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук. 1981. №36. С. 107–159.
- [12] *Sard A.* Best approximate integration formulas; best approximation formulas // Amer. J. Math. 1949. №71. С. 80–91.
- [13] *Schoenberg I.J.* On monosplines of least deviation and best quadrature formulae // J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. B Numer. Anal, 1965. № 2. С. 144–170.
- [14] *Schoenberg I.J., Silliman S.D.* On semicardinal quadrature formulae // Math. Comp, 1965 №28, С. 483–497.
- [15] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Construction of the discrete analogue of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ // Uzbek mathematical journal, 2004. №2, С. 85–95.
- [16] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0,1)$ space // J. Comput. Appl. Math. 2011. №235, С. 1114–1128.
- [17] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space // Calcolo, 2014. №51, С. 211–243.
- [18] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A.* On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ // J. Comput. Appl. Math, 2013. №243, С. 91–112.
- [19] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A.* Optimal quadrature formulas of Euler-Maclaurin type // Applied Mathematics and Computation, 2016. №276. С. 340–355.
- [20] *Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A.* Optimal formulas of numerical integration with derivatives in Sobolev space // Journal of Siberian Federal University. Math. and Phys, 2018. №11 (6), С. 764–775.
- [21] *Sobolev S.L.* The coefficients of optimal quadrature formulas // Selected Works of S.L. Sobolev, Springer, 2006. С. 561–566.
- [22] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул // Наука, Москва, 1974.
- [23] *Sobolev S.L., Vaskevich V.L.* The Theory of Cubature Formulas // Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. 1997.
- [24] *Загирова Ф.Я.* О построении оптимальных квадратурных формул с равноправными узлами.Новосибирск // Институт математики СО АН СССР, 1982. №25. С. 28
- [25] *Женсикбаев А.А.* Моносплайны минимальной нормы и лучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук. 1981. №36. С. 107–159.

Поступила в редакцию 13.03.2020

УДК 596.7

КОЭФФИЦИЕНТЫ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ.

¹Шадиметов Х. М., ²Далиев Б. С.

kholmatshadimetov@mail.ru; bahtiyorjon@inbox.ru

¹Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз;²Ферганский политехнический институт.

В работе найдены оптимальные коэффициенты квадратурных формул для приближенного решения обобщенного уравнения Абеля, кроме того, вычислена квадрат нормы функционала погрешности квадратурных формул в пространстве Соболева.

Ключевые слова: пространство Соболева, экстремальная функция, оптимальные коэффициенты, функционал погрешности.

Цитирование: Шадиметов Х. М., Далиев Б. С. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул для приближенного решения общего интегрального уравнения Абеля. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 24–31.

1 Введение

В работе [1] для квадратурных формул вида

$$\int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta]\varphi(h\beta), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,t]}(t-x)^{\alpha-1} - \sum_{\beta=0}^N C[\beta]\delta(x-h\beta), \quad (2)$$

в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0, t)$ (см. [2] [3]) найдена экстремальная функция и с ее помощью вычислена квадрат нормы функционала погрешности

$$\begin{aligned} \|\ell/L_2^{(m)*}\|^2 &= (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\beta'=0}^N C[\beta] C[\beta'] G_m(h\beta - h\beta') \right. \\ &\quad - 2 \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} G_m(x-h\beta) dx \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} (t-y)^{\alpha-1} G_m(x-y) dx dy \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Минимизируя эту норму при условии

$$(\ell, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4)$$

получим следующую систему для нахождения коэффициентов оптимальных квадратурных формул $\overset{0}{C}[\beta]$:

$$G_m[\beta] * \overset{0}{C}[\beta] + P_{m-1}[\beta] = f_m[\beta], \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (5)$$

$$\overset{0}{C}[\beta] = 0 \quad h\beta \notin [0, t], \quad (6)$$

$$\sum_{\beta=0}^N \overset{0}{C}[\beta] (h\beta)^k = g_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (7)$$

Здесь

$$G_m[\beta] = \frac{|h\beta|^{2m-1}}{2 \cdot (2m-1)!}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} f_m[\beta] &= \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} G_m(x-h\beta) dx \\ &= \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \frac{(h\beta)^{2m-1-k} (\alpha-1)! t^{\alpha+k}}{2 \cdot (2m-1-k)! (\alpha+k)!} + \frac{(\alpha-1)! (t-h\beta)^{2m-1+\alpha}}{(\alpha+2m-1)!}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$g_k = \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} x^k dx = \frac{(\alpha-1)! k! t^{\alpha+k}}{(\alpha+k)!}. \quad (10)$$

В работе [4] разработан алгоритм решения системы типа (5),(6),(7). Этот алгоритм реализуем в случае $m = 1$. Для вычисления интегралов в формуле (1) предлагались различные методы (см. [5] [6] [7]).

2 Основные результаты

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(0, t)$ определяются формулами

$$\overset{0}{C}[0] = \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)} ((t-h)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}),$$

$$\overset{0}{C}[\beta] = \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)} ((t-h(\beta+1))^{\alpha+1} - 2(t-h\beta)^{\alpha+1} - (t-h(\beta-1))^{\alpha+1}),$$

$$\beta = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\overset{0}{C}[N] = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}.$$

Теорема 2. Квадрат нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул вида (1) над пространством $L_2^{(1)}(0, t)$ выражается равенством

$$\left\| \ell / L_2^{(1)*}(0, t) \right\|^2 = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \left[\sum_{\beta=0}^N \overset{0}{C}[\beta] (t-h\beta)^{\alpha+1} - \frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} \right].$$

3 Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.

В случае $m = 1$ система (5),(6),(7) имеет вид

$$G_1[\beta] * \overset{0}{C}[\beta] + \lambda = f_1[\beta], \quad (11)$$

при $h\beta \in [0, t]$,

$$\overset{0}{C}[\beta] = 0 \quad h\beta \notin [0, t], \quad (12)$$

$$\sum_{\beta=0}^N \overset{0}{C}[\beta] = g. \quad (13)$$

Здесь $G_1[\beta] = \frac{[h\beta]}{2}$, $[\beta] = h\beta$,

$$f_1[\beta] = \frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + \frac{(t - h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}, \quad (14)$$

$$g = \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad (15)$$

$h = \frac{t}{N}$, $N = 1, 2, \dots$, λ - неизвестный параметр.

Обозначим через $U[\beta] = G_1[\beta] * \overset{0}{C}[\beta] + \lambda$.

Из (11) следует, что на отрезке $[0, t]$ дискретная функция $U[\beta] = f[\beta]$. Из (14) имеет место

$$U[\beta] = \frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + \frac{(t - h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)} \quad h\beta \in [0, t]. \quad (16)$$

Теперь определим функцию $U[\beta]$ вне отрезка $[0, t]$, т.е. при $h\beta \notin [0, t]$. Пусть $h\beta \leq 0$ или $\beta = 0, -1, -2, \dots$, тогда

$$U[\beta] = G_1[\beta] * \overset{0}{C}[\beta] + \lambda = \sum_{-\infty}^{\infty} \overset{0}{C}[\gamma] * G_1[\beta - \gamma] + \lambda$$

Отсюда учитывая, что $G_1[\beta] = \frac{[h\beta]}{2}$ и (12), получим

$$\begin{aligned} U[\beta] &= \sum_{\gamma=0}^N \overset{0}{C}[\gamma] \frac{[h\beta - h\gamma]}{2} + \lambda = -\frac{1}{2} \sum_{\gamma=0}^N \overset{0}{C}[\gamma] (h\beta - h\gamma) + \lambda \\ &= -\frac{h\beta}{2} \sum_{\gamma=0}^N \overset{0}{C}[\gamma] + \frac{1}{2} \sum_{\gamma=0}^N \overset{0}{C}[\gamma] (h\gamma) + \lambda \end{aligned}$$

В силу (13), (15) имеем

$$U[\beta] = -\frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + a_0^-, \quad (17)$$

где

$$a_0^- = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=0}^N \overset{0}{C}[\gamma] h\gamma + \lambda. \quad (18)$$

Точно также вычислим $U[\beta]$ при $h\beta \geq N$, т.е. $\beta = N, N+1, \dots$:

$$U[\beta] = \frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + a_0^+, \quad (19)$$

здесь

$$a_0^+ = -\frac{1}{2} \sum_{\beta=0}^N \overset{0}{C}[\beta] h\beta + \lambda. \quad (20)$$

Из (18), (20) следует, что

$$\lambda = \frac{a_0^- + a_0^+}{2}. \quad (21)$$

Значит при $\beta \in Z, U[\beta]$ имеет вид

$$U[\beta] = \begin{cases} -\frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + a_0^-, & \beta \leq 0 \\ \frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + \frac{(t-h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}, & \beta = 0, 1, \dots, N \\ \frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + a_0^+, & \beta \geq N. \end{cases} \quad (22)$$

Теперь определим неизвестные коэффициенты a_0^- и a_0^+ . Для этого пользуемся известным оператором

$$D_1[\beta] = \begin{cases} 0, & |\beta| \geq 2 \\ h^{-2}, & |\beta| = 1 \\ -2h^{-2}, & \beta = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Известно, что [8]

$$hD_1[\beta] * \frac{|h\beta|}{2} = \delta[\beta], \quad (24)$$

где

$$\delta[\beta] = \begin{cases} 1, & \beta = 0 \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases} \quad (25)$$

отсюда и из определения $U[\beta]$ следует, что

$$C[\beta] = D_1[\beta] * U[\beta], \quad \beta = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

Однако из условия $C[\beta] = 0$, $h\beta \notin [0, t]$ следует, что

$$D_1[\beta] * U[\beta] = 0, \quad h\beta \notin [0, t] \quad (27)$$

Вычисляя свертку в (27), получим

$$D_1[\beta] * U[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_1[\beta - \gamma] U[\gamma] = h^{-1}U[\beta - 1] - 2h^{-2}U[\beta] + h^{-2}U[\beta + 1]$$

Отсюда и из (27) при $\beta = -1$ и $\beta = N+1$ получаем систему линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов a_0^- и a_0^+

$$\begin{aligned} U[-2] - 2U[-1] + U[0] &= 0, \\ U[N] - 2U[N+1] + U[N+2] &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (22) следует, что

$$U[-2] = \frac{t^\alpha h}{\alpha} + a_0^-, \quad U[-1] = \frac{t^\alpha h}{2\alpha} + a_0^-, \quad U[0] = \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}, \quad U[N] = \frac{t^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)},$$

$$U[N+1] = \frac{t+h}{2} \cdot \frac{t^\alpha}{\alpha} + a_0^+, \quad U[N+2] = \left(\frac{t}{2} + h\right) \frac{t^\alpha}{\alpha} + a_0^+.$$

Тогда из системы (28) находим

$$a_0^- = \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}, \quad a_0^+ = -\frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}. \quad (29)$$

Отсюда и из (21) имеем

$$\lambda = 0. \quad (30)$$

Теперь переходим к вычислению оптимальных коэффициентов квадратурных формул вида (1) в пространстве $L_2^{(1)}(0, t)$. Оптимальные коэффициенты при $h\beta \in [0, t]$ вычисляется следующей формулой

$${}^0\tilde{C}[\beta] = hD_1[\beta] * U[\beta] = h \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_1[\beta - \gamma] U[\gamma], \quad \beta = 0, 1, 2, \dots, N.$$

При $\beta = 0$ и $\beta = N$ коэффициенты вычисляется отдельно.

Пусть $\beta = 0$, тогда ${}^0\tilde{C}[0] = h[D[-1]U[-1] + D[0]U[0] + D[1]U[1]]$.

Из (22) непосредственно получаем

$$U[-1] = \frac{t^\alpha h}{2\alpha} + \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}, \quad U[0] = \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)},$$

$$U[1] = \frac{t^\alpha h}{2\alpha} + \frac{(t-h)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}.$$

Значит

$${}^0\tilde{C}[0] = \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{(t-h)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}}{h\alpha(\alpha+1)}.$$

Пусть $\beta = N$, тогда

$${}^0\tilde{C}[N] = h[D[-1]U[N+1] + D[0]U[N] + D[1]U[N-1]].$$

Аналогично из (22) получаем

$$U[N+1] = \frac{t^\alpha h}{2\alpha} + \frac{t^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}, \quad U[N] = \frac{t^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)},$$

$$U[N-1] = \frac{t^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} - \frac{t^\alpha h}{2\alpha} + \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}.$$

Отсюда получаем, что ${}^0\tilde{C}[N] = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}$. Переходим к вычислению ${}^0\tilde{C}[\beta]$ при $\beta = 1, 2, \dots, N-1$.

$${}^0\tilde{C}[\beta] = h \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D[\beta - \gamma] U[\gamma] = h[D[-1]U[\beta+1] + D[0]U[\beta] + D[1]U[\beta-1]].$$

Так, как

$$U[\beta] = f_1[\beta] = \frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + \frac{(t - h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)},$$

при $\beta = 0, 1, \dots, N$, тогда

$${}^0\bar{C}[\beta] = \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)} [(t - h(\beta+1))^{\alpha+1} - 2(t - h\beta)^{\alpha+1} + (t - h(\beta-1))^{\alpha+1}],$$

при $\beta = 1, 2, \dots, N-1$.

Итак, теорема 1 доказана полностью.

Замечание 1. Оптимальные коэффициенты ${}^0\bar{C}[\beta]$ при $h \rightarrow 0$ стремятся к нулю. Этот факт сразу следует, если вычислим этот предел применяя правило Лопиталя, так как

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} {}^0\bar{C}[\beta] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t - h(\beta+1))^{\alpha+1} - 2(t - h\beta)^{\alpha+1} + (t - h(\beta-1))^{\alpha+1}}{h\alpha(\alpha+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\beta(t - h\beta)^\alpha - (\beta+1)(t - h(\beta+1))^\alpha - (\beta-1)(t - h(\beta-1))^\alpha}{\alpha} \\ &= 2\beta t^\alpha - (\beta+1)t^\alpha - (\beta-1)t^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Замечание 2. Оптимальные коэффициенты ${}^0\bar{C}[\beta]$ ещё можно записать в другой форме.

Пусть $\Delta^2[\beta] = \delta[\beta+1] - 2\delta[\beta] + \delta[\beta-1]$, тогда

$${}^0\bar{C}[\beta] = \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)} \Delta^2[\beta] * (t - h\beta)^{\alpha+1}$$

Теперь переходим к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Из (3) при $m = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| \ell/L_2^{(1)*} \right\|^2 &= - \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\beta'=0}^N {}^0[\beta] {}^0[\beta'] \frac{|h\beta - h\beta'|}{2} \right. \\ &\quad - 2 \sum_{\beta=0}^N [\beta] \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} \frac{|x - h\beta|}{2} dx \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} (t-y)^{\alpha-1} \frac{|x-y|}{2} dx dy \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Непосредственно вычислением интегралов получаем, что

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} \frac{|x - h\beta|}{2} dx = \frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + \frac{(t - h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}, \quad (32)$$

$$\int_0^t \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} (t-y)^{\alpha-1} \frac{|x-y|}{2} dx dy = \frac{t^{2\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}. \quad (33)$$

В силу (30) равенство (11) принимает вид

$$\sum_{\beta'=0}^N {}^0C[\beta] |h\beta - h\beta'| = \frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + \frac{(t - h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)}, \quad (33)$$

при $\beta = 0, 1, \dots, N$.

Учитывая (32), (33), (34) выражения для квадрата нормы (31) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \left\| \ell/L_2^{(1)*} \right\|^2 &= \sum_{\beta=0}^N {}^0C[\beta] f_1[\beta] - \frac{t^{2\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)} = \\ &= \sum_{\beta=0}^N {}^0C[\beta] \left(\frac{t^\alpha h\beta}{2\alpha} + \frac{(t - h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)} \right) - \frac{t^{2\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Так, как наша оптимальная квадратурная формула точна для константы, то она должна быть точной и одночлена x , т.е.

$$\sum_{\beta=0}^N {}^0C[\beta] (h\beta) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}. \quad (36)$$

Но это равенство получается и непосредственным вычислением. Теперь пользуясь формулами (13) и (36) после некоторых упрощений из (35) получаем

$$\left\| \ell/L_2^{(1)*} \right\|^2 = \sum_{\beta=0}^N {}^0C[\beta] \frac{(t - h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{t^{2\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}.$$

Теорема 2 доказано полностью.

Литература

- [1] Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Экстремальная функция квадратурных формул для приближенного решения обобщенного интегрального уравнения Абеля // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2019. – №2(20). С. 88-95.
- [2] Соболев С. Л Введения в теорию кубатурных формул. – М., 1974. – 808 с.
- [3] Соболев С. Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. – Новосибирск : СОРАН, 1996. – 488 с.
- [4] Шадиметов Х.М. Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева. – Т.: "Фан ва технологиялар"2019, 229 с.
- [5] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1995. – 256 с.
- [6] Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: Янус, 1995. – 520 с.
- [7] Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Линейная нестационарная задача Абеля // Вопросы кибернетики. Численный эксперимент и прикладной аэродинамики. – М.: Наука, 1986. – С. 28-46.
- [8] Шадиметов Х.М. Дискретный аналог оператора и его построение // Вопросы вычислительной прикладной математики. – Т., 1995. – С. 22-35.

Поступила в редакцию 26.02.2020

UDC 596.7

COEFFICIENTS OF OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS FOR AN APPROXIMATE SOLUTION OF THE GENERAL ABEL INTEGRAL EQUATION.

¹*Shadimetov Kh. M.*, ²*Daliev B. S.*

kholmatshadimetov@mail.ru; bahtiyorjon@inbox.ru

¹Institute of Mathematics UzAS;

²Fergana Polytechnic of Institute.

In this paper, the coefficients of optimal quadrature formulas for the approximate solution of the generalized Abel equation is found. In addition, the square of the norm of the error functional of quadrature formulas is calculated in the Sobolev space.

Keywords: Sobolev space, extremal function, optimal coefficients, error functional.

Citation: Shadimetov Kh. M., Daliev B. S. 2020. Coefficients of optimal quadrature formulas for an approximate solution of the general Abel integral equation.. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26): 24–31.

References

- [1] Shadimetov X.M., Daliev B.S. *Extremalnaya funktsiya kvadraturnih formul dlya priblizhennogo resheniya obobshennogo integralnogo uravneniya Abelya.* // *Problemi vychislitel'noy i prikladnoy matematiki* [Extreme function of quadrature formulas for an approximate solution of the generalized Abel integral equation. // *Problems of Computational and Applied Mathematics*]. 2019, 2 (20). 88-95 pp. (In Russian)
- [2] Sobolev, S.L *Vvedenie v teoriyu kubaturnix formul* [Introduction to the theory of cubature formulas]. Moscow: 1974, 808 p. (In Russian)
- [3] Sobolev, S.L. Vaskevich V.L *Kubaturnie formuli* [Cubature formulas]. Novosibirsk: 1996, 488 p. (In Russian)
- [4] Shadimetov X.M. *Optimalniy reshechatiy kvadraturni i kubaturniy formuli v prostranstvax Soboleva* [Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces]. *Fan va texnologiya*: 2019, 229 p.
- [5] Beloselkovski S.M., Lifanov I.K. *Chislenniy metodi v singulyarnix integralnix uravneniyax* [Numerical methods in singular integral equations]. M: Nauka 1995, 256 p.
- [6] Lifanov I.K. *Metod singulyarnix integralnix uravneniy i chislenniy eksperiment* [The method of singular integral equations and numerical experiment]. M: TOO , Yanus, 1995, 520 p.
- [7] Lifanov I.K., Poltavskiy L.N. *Lineynaya nestatsionarnaya zadacha Abelya* // *Voprosi kibernetiki. Chislenniy eksperiment i prikladnoy aerodinamiki* [Abel's linear non-stationary problem/ / *Questions of cybernetics. Numerical experiment and applied aerodynamics*]. M: Nauka, 1986, 22-35 pp.
- [8] Shadimetov X.M. *Diskretniy analog operatora i yego postroyeniya* // *Voprosi vychislitel'noy i prikladnoy matematiki* [Discrete analogue of the operator and its construction./ *Questions of computational applied mathematics*]. Tashkent. 1995, 22-35 pp.

Received February 26, 2020

УДК 517.98

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОГО КУБИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

¹Хамраев А. Ю., ²Турсунова А. Х.

khamrayev-a@yandex.ru; tursunova-a@inbox.uz

¹Каршинский государственный университет, г. Карши. ул. Кучабог, 17;²Каршинский филиал ТУИТ, г. Карши. ул. Бешкент йули 3 км.

В настоящей работе мы изучаем динамические системы, задаваемые кубическим оператором. Для одного кубического невольтерровского оператора на двумерном симплексе рассмотрено и найдено все неподвижные точки, и полностью изучены поведение траектории этого оператора. Известно, что динамика дискретной динамической системы зависят от начальных точек. Если получим начальную точку из ребро, то из инвариантности ребро стремится к неподвижной точки. Одна из основных задач для данной системы состоит в изучении эволюции состояния системы. Обычно потомки состояния системы определяются некоторыми законами. Для решений задач, возникающих в математической генетике используется квадратичные операторы, теория которых в настоящей время хорошо развита. Дано описание множества предельных точек траектории для некоторых подклассов таких операторов. В настоящей работе мы изучаем динамические системы, задаваемые кубическим оператором. В работе изучается траектория одного кубического оператора на двумерной симплексе, который естественным образом возникает при изучении некоторых задач популяционной биологии. В простейшей задаче популяционной генетики рассматривается биологическая система конечного множества, состоящая из n разновидностей $1, 2, \dots, n$. Считаем, что разновидности родителей i, j, k однозначно определяют вероятность каждой разновидности l для непосредственного потомка.

Ключевые слова: Кубический оператор, двумерный симплекс, теория динамических систем, неподвижная точка.

Цитирование: Хамраев А. Ю., Турсунова А. Х. Полное описание поведения траекторий одного кубического оператора // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 32–38.

1 Введение

В настоящей работе мы изучаем динамические системы, задаваемые кубическим оператором. Одна из основных задач для данной системы состоит в изучении эволюции состояния системы. Обычно потомки состояния системы определяются некоторыми законами. Для решений задач возникающих в математической генетике используется квадратичные операторы, теория которых в настоящей время хорошо развита [1–3].

В работе [4] для одного вольтерровского кубического оператора на двумерном симплексе найдены все неподвижные точки. Дано описание множества предельных точек траектории для некоторых подклассов таких операторов.

В пункте 2 полностью изучается траектория одного кубического оператора на S^2 , который естественным образом возникает при изучении некоторых задач популяционной биологии. Многочисленные задачи биологии решаются применением теории меры и теории динамических систем [5]. Эти динамические системы определяются итерациями нелинейных операторов. Дадим определение таких операторов:

Пусть $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

Рассмотрим множество

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Множество S^{n-1} называется $n-1$ мерным симплексом. Каждый элемент является вероятностной мерой на E и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической, социологической и т. п.) системы, состоящей из n элементов.

В простейшей задаче популяционной генетики рассматривается биологическая система E , состоящая из n разновидностей $1, 2, \dots, n$ [6–9]. Считаем, что разновидности родителей i, j, k однозначно определяют вероятность каждой разновидности l для непосредственного потомка. Обозначим эту вероятность через $P_{ijk,l}$. Тогда $P_{ijk,l} \geq 0$, $\sum_{l=1}^n P_{ijk,l} = 1$ и значения $P_{ijk,l}$ не меняются при любой перестановке i, j, k , если разновидности не сваны с полом.

Состояние популяции описывается набором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вероятности разновидностей. Следовательно, $x \in S^{n-1}$.

При случайном скрещивании

$$x'_l = \sum_{i,j,k=1}^n P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

будет полной вероятностью разновидности для непосредственных потомков.

Пусть $W : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ отображение определяемое равенством (1). Оператор W назовем кубическим оператором. Таким образом, если в некотором поколении популяция находится в состоянии x , то в следующем поколении она находится в состоянии $x' = Wx$.

2 Об одном кубическом операторе на S^2 .

Рассмотрим кубический оператор $W : S^2 \rightarrow S^2$ следующего вида:

$$W : \begin{cases} x' = x(x^2 + 3xy + 3xz) \\ y' = y(y^2 + 3xy + 3yz + 3xz) \\ z' = z(z^2 + 3yz + 3xz + 3xy) \end{cases} \quad (2)$$

Пусть $\lambda_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ начальное распределение. Траектория точки λ_0 при действии оператора (2) определяется следующим образом: $\lambda_n = W(\lambda_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$.

Основная задача этого пункта состоит в изучении траектории $\{\lambda_n\}$, т.е. описать множество предельных точек последовательности $\lambda_n = W^{(n)}(\lambda_0) = W(W^{(n-1)}(\lambda_0))$ для любого $\lambda_0 \in S^2$.

3 Построение траекторий одного кубического оператора

3.1 Неподвижные точки.

Для описания неподвижных точек рассмотрим систему уравнений $W(\lambda) = \lambda$.

а) Заметим, что $M_1(1, 0, 0)$, $M_2(0, 1, 0)$, $M_3(0, 0, 1)$, т.е. вершины симплекса S^2 является неподвижными точками для (2).

б) Пусть $x = 0$, $y > 0$, $z > 0$, то из (2) получим

$$\begin{cases} 1 = y^2 + 3yz \\ 1 = z^2 + 3yz. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $y = z = \frac{1}{2}$, т.е. $N(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ неподвижная точка.

с) Пусть $xyz \neq 0$. Тогда из (2) имеем

$$\begin{cases} x = x(x^2 + 3xy + 3xz) \\ y = y(y^2 + 3xy + 3yz + 3xz) \\ z = z(z^2 + 3yz + 3xz + 3xy). \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, $x = \frac{1}{2}, y = z = \frac{1}{4}$. Таким образом, $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ также неподвижная точка.

Следовательно, множество неподвижных точек оператора (2) есть

$$Fix(W) = \{M_1, M_2, M_3, N, C\}.$$

3.2 Инвариантные подмножества.

Очевидно, что все грани симплекса $S^2 = M_1 M_2 M_3$ являются инвариантными подмножествами для оператора (2). Кроме того, медиана $M_1 N$ является тоже инвариантным множеством. Действительно, подставляя, например, $y = z$ в (2) получим, что $y' = z'$. Рассмотрим множества

$$S^2_{>} = \{\lambda \in S^2 : y > z\} \text{ и } S^2_{<} = \{\lambda \in S^2 : y < z\}$$

Лемма 1. Множества $S^2_{>}$ и $S^2_{<}$ являются инвариантными подмножествами S^2 относительно W .

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} y' - z' &= y(y^2 + 3xy + 3xz + 3yz) - z(z^2 + 3xy + 3yz + 3xz) = \\ &= (y - z)(y^2 + z^2 + 3xy + 3xz + 4yz) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $y' > z'$. Аналогично, можно доказать, что из $y < z$ следует $y' < z'$. Лемма доказана.

3.3 Поведение траектории на ребрах.

Пусть $\lambda \in M_1 M_2$ (остальные ребра исследуются аналогично). Сужение оператора (2) на $M_1 M_2$, имеет вид:

$$\begin{cases} x' = x(x^2 + 3xy) \\ y' = y(y^2 + 3xy) \end{cases} \quad (3)$$

Учитывая $x + y = 1$ из (3) получим $f(x) = x' = x^2(3 - 2x)$.

Здесь f является возрастающей при $x \in [0, 1]$.

Получим

$$Fix(f) = \{x \in [0, 1] : f(x) = x\} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}.$$

Используя вышеупомянутые свойства функции $f(x)$ и проверки $|f'(a)|$, при $a \in Fix(f)$ можно увидеть, что последовательность $x^{(n)} = f(x^{(n-1)})$, $n \geq 1$, для $x^{(0)} \in [0, 1]$ имеем следующие пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \begin{cases} 0, & x^{(0)} \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1, & x^{(0)} \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

3.4 Поведение траектории на инвариантной медиане.

Пусть $x \neq y = z$. Сужение оператора (2) на $M_1 N$, учитывая, $x + 2y = 1$ имеет вид $g(y) = y^2(6 - 8y)$. Здесь g является возрастающей при $y \in [0, 1/2]$. Получим

$$Fix(g) = \{y \in [0, 1/2] : g(y) = y\} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$$

Используя вышеупомянутые свойства функции $g(y)$ и проверки $|g'(a)|$ при $a \in Fix(g)$ можно увидеть, что последовательность $x^{(n)} = g(x^{(n-1)})$, $n \geq 1$, для $y^{(0)} \in [0, 1/2]$ имеем следующие пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)} = \begin{cases} 0, & y^{(0)} \in [0, \frac{1}{4}), \\ \frac{1}{2}, & y^{(0)} \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

3.5 Поведение траекторий на $S^2_{>} \cup S^2_{<}$

Пусть $\lambda = (x, y, z)$ и $\varphi(\lambda) = |y - z|$.

Лемма 2. Для любого маленького $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in (S^2_{>} \cup S^2_{<}) \cap \{\lambda \in S^2 : x < \varepsilon\}$ справедливо неравенство

$$\varphi(W(\lambda)) \geq \varphi(\lambda).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi(W(\lambda)) &= |y' - z'| = |y(y^2 + 3xy + 3xz + 3yz) - z(z^2 + 3xy + 3yz + 3xz)| \\ &= \varphi(\lambda)|y^2 + z^2 + 3xy + 3xz + 4yz| = \varphi(\lambda)(y^2 + z^2 + 3xy + 3xz + 4yz) = \\ &= \varphi(\lambda)((y + z)^2 + 3x(y + z) + 2yz) = \varphi(\lambda)((1 - x)^2 + 3x(1 - x) + 2yz) = \\ &= \varphi(\lambda)(1 + x + 2(yz - x^2)) \geq \varphi(\lambda)(1 + x + 2(yz - \varepsilon^2)) \geq \varphi(\lambda) \end{aligned} \quad (4)$$

Лемма 3. Для маленького $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in (S^2_{>} \cup S^2_{<}) \cap \{\lambda \in S^2 : x < \varepsilon\}$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(W^{(n)}(\lambda)) = 1.$$

Доказательство. Пусть произвольный маленький $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in (S^2_{>} \cup S^2_{<}) \cap \{\lambda \in S^2 : x < \varepsilon\}$. Первую равенству оператора можно переписать в виде $f(x) = x' = x^2(3 - 2x)$. Тогда имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = 0$.

В силу леммы 2, $\varphi(W^{(n+1)}(\lambda)) \geq \varphi(W^{(n)}(\lambda))$, $\varphi(W^{(n)})$ монотонно возрастает при $\lambda \in (S^2_{>} \cup S^2_{<}) \cap \{\lambda \in S^2 : x < \varepsilon\}$. Ясно, что $0 < \varphi(\lambda) < 1$. Следовательно, $\varphi(W^{(n)}(\lambda))$ сходится. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(W^{(n)}(\lambda)) = \mu < 1,$$

тогда

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(W^{(n+1)}(\lambda))}{\varphi(W^{(n)}(\lambda))} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + x^{(n)} + 2(y^{(n)}z^{(n)} - (x^{(n)})^2)}{\mu}$$

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x^{(n)} + 2(y^{(n)}z^{(n)} - (x^{(n)})^2)) = 0$$

Откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)}z^{(n)} < 0$, что противоречит $\lambda \in S^2$. Лемма доказана.

Все результаты этого пункта можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Для любой $\lambda = (x, y, z) \in S^2$ траектории оператора (2), имеем следующие пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^{(n)}(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \lambda \in \text{Fix}(W) \\ (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), & \text{если } \lambda \in \{x = 0\} \\ (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), & \text{если } \lambda \in \{y = 0\} \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), & \text{если } \lambda \in \{z = 0\} \\ (1, 0, 0), & \text{если } \lambda \in \{x > 1/2\} \\ (0, 1, 0), & \text{если } \lambda \in \{x < 1/2, y > z\} \\ (0, 0, 1), & \text{если } \lambda \in \{x < 1/2, y < z\} \end{cases}$$

4 Заключение

В статье описывается полная динамика конкретного оператора дискретного типа. Доказано, что любая траектория такого оператора сходится к неподвижной. Инвариантность каждого ребра и медианы помогает изучению динамики оператора.

Литература

- [1] Хамраев А.Ю. Об одном кубическом операторе вольтерровского типа // Узбекский математический журнал. 2009. Т.3. С. 65-71.
- [2] Розиков У.А., Хамраев А.Ю. О кубических операторах определенных на конечномерным симплексах // Украинский математический журнал. 2004. Т.56. 10. С. 1418-1427.
- [3] Rozikov U.A., Khamrayev A.Yu. On construction and a Class of Non-Volterra cubic stochastic operators // Nonlinear Dyn. Syst. Theory. 2014. Vol.14, Issue 1. С. 92-100.
- [4] Хамраев А.Ю. Поведение траекторий одного кубического оператора на двумерном симплексе // Узбекский математический журнал. 2013. 1. С. 130-137.
- [5] Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A. Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems // Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields. 2011. P. 279-335.
- [6] Jamilov U.U., Reinfelds A. On constrained Volterra cubic stochastic operators // Journal of Difference Equations and Applications. 2020, Vol. 26. Issue 2. P. 54-57. doi: <http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2020.1720664>.
- [7] Jamilov U.U., Reinfelds A. Family of Volterra cubic stochastic operators // Journal Convex Analysis. 2020, Vol. 27. Issue 4. P. 54-57.
- [8] Jamilov U.U., Khamrayev A.Yu., Larda M. On a Volterra cubic stochastic operators // Bulletin of Mathematical Biology. 2018, Vol. 80. Issue 2. P. 319-334.
- [9] Jamilov U.U., Larda M. On identically distributed non-Volterra cubic stochastic operators // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2017, Vol. 6. Issue 1. P. 79-90.
- [10] Jamilov U.U., Rozikov U.A. The dynamics of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators on the 2-simplex // Sbornik: Mathematics, 2009. Vol.200, Issue 9. P. 1339-1351.
- [11] Mukhamedov F.M., Jamilov U.U., Pirnapasov A.T. On Nonergodic Uniform Lotka–Volterra Operators // Math. Notes. 2019. Vol.105, Issue 2. С. 258–264.
- [12] Розиков У.А., Жамилов У.У. FF-квадратичные стохастические операторы // Математические заметки. 2008. № 83(4). С. 606–612.

- [13] Розиков У.А., Жамилов У.У., О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе // Математический сборник. 2009. № 200(9) С 81–94.
- [14] Розиков У.А., Жамилов У.У. Вольтерровские квадратичные стохастические операторы двуполой популяции // Украинский математический журнал. 2011. № 63(7). С. 985–998.
- [15] Jamilov U. U. Linear Lyapunov functions for Volterra quadratic stochastic operators // TWMS JOUR. PURE APPL. MATH.. 2012. №3(1) С. 28–34

Поступила в редакцию 17.03.2020

UDC 517.98

FULL DESCRIPTION OF THE BEHAVIOR OF TRAJECTORIES OF A CUBIC OPERATOR

¹*Khamroev A Yu., I.,* ²*Tursunova A Kh.*

khamrayev-a@yandex.ru; tursunova-a@inbox.uz

¹Karshi State University, 17 Kuchabog, Karshi, Uzbekistan;

²Karshi branch of Tashkent University of Information Technologies, 3 km Beshkent yuli,
Karshi, Uzbekistan.

In this paper, we study dynamical systems defined by a cubic operator. For a cubic non-Volterra operator on the two-dimensional simplex, all fixed points were found and the behavior of the trajectories of this operator was completely studied. It is known that the dynamics of a discrete dynamical system depends on a starting point. If we obtain the starting point from the edge, then the trajectory converges to a fixed point. One of the main tasks for this system is to study the evolution of the system state. Usually, the descendants of the state of the system are determined by certain laws. For solving problems arising in mathematical genetics, quadratic operators are used, whose theory is now well developed. A description of the set of limit points of the trajectory for some subclasses of such operators is given. In this paper, we study dynamical systems defined by a cubic operator. In this paper, we study the trajectory of a single cubic operator on the two-dimensional simplex, which naturally arises in certain problems of population biology. In the simplest problem of population genetics, a biological system of a finite set consisting of n species $1, 2, \dots, n$ is considered. We assume that the species of parents i, j, k uniquely determine the probability of each species l for the immediate descendant.

Keywords: Cubic operator, two-dimensional simplex, theory of dynamical systems, fixed point..

Citation: Khamroev A. Yu., Tursunova A. Kh 2020. Full description of the behavior of trajectories of a cubic operator. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26): 32–38.

References

- [1] Khamraev A. Yu. 2009. Ob odnom kubicheskom opereatore vol'terovskogo tipa [On a cubic operator of Voltaire type.] *Uzbek Mathematical Journal*. 3:65-71.

- [2] Rozikov U.A., Khamraev A.Yu. 2004. O kubicheskikh operatorakh opredelennykh na konechnomernym simpelksakh [On cubic operators defined on finite-dimensional simplexes.] *UkrMZh* 56(10):1418-1427.
- [3] Rozikov U.A., Khamrayev A.Yu. 2014. On construction and a Class of Non-Volterra cubic stochastic operators. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*. 14(1):92-100.
- [4] Khamraev A.Yu. 2013. Povedenie traektoriy odnogo kubicheskogo operatora na dvumernom simplekse. *Uzbek Mathematical Journal*. 1:130-137.
- [5] Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A. 2011. Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems. *Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields*. 14(2):279-335.
- [6] Jamilov U.U., Reinfelds A. 2020. On constrained Volterra cubic stochastic operators. *Journal of Difference Equations and Applications*. 26(2):98-108. doi: <http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2020.1720664>.
- [7] Jamilov U.U., Reinfelds A. 2020. Family of Volterra cubic stochastic operators. *Journal Convex Analysis*. 27(4):54-57.
- [8] Jamilov U.U., Khamraev A.Yu., Larda M. 2018. On a Volterra cubic stochastic operators. *Bulletin of Mathematical Biology*. 80(2):319-334.
- [9] Jamilov U.U. Larda M. 2017. On identically distributed non-Volterra cubic stochastic operators. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*. 6(1)79-90.
- [10] Jamilov U.U., Rozikov U.A. 2009. The dynamics of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators on the 2-simplex. *Sb. Math.* 200(9):1339-1351.
- [11] Mukhamedov F.M., Jamilov U.U., Pirnapasov A.T. 2019. On Nonergodic Uniform Lotka–Volterra Operators. *Math. Notes*, 105(2):258-264.
- [12] Rozikov U.A., Jamilov U.U. 2008. FF-kvadratichnye stokhasticheskie operatory. *Matematicheskie Zametki*. 83(4):606–612.
- [13] Rozikov W.A., Jamilov W.U. 2009. O dinamike strogo nevol'terrovskikh kvadratichnykh stokhasticheskikh operatorov na dvumernom simplekse. *Matematicheskii Sbornik*. 200(9):81-94.
- [14] Rozikov U.A., Zhamilov U.U. 2011. Vol'terrovskie kvadratichnye stokhasticheskie operatory dvupoloy populyatsii. *Ukrainian Mathematical Journal*. 63(7):985-998.
- [15] Jamilov U.U. 2012. Linear Lyapunov functions for Volterra quadratic stochastic operators. *TWMS JOUR. PURE APPL. MATH.* 3(1):28-34

Received March 17, 2020

УДК 532.546

МОДЕЛИРОВАНИЕ КИСЛОТНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПРИЗАБОЙНУЮ ЗОНУ ПЛАСТА НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ С КАРБОНАТНЫМИ КОЛЛЕКТОРАМИ С УЧЕТОМ ТРЕЩИНОВАТОСТИ ПОРОДЫ

Бурнашев В.Ф., Хужаёров Б.Х., Ахмедов О.

vladimir.burnash@mail.ru; b.khuzhayorov@mail.ru

Самаркандский государственный университет,

140104, Узбекистан, Самарканд, Университетский бульвар, 15.

В работе рассматривается задача моделирования кислотного воздействия на призабойную зону пласта нефтяных месторождений с карбонатными трещиновато-пористыми коллекторами. Моделирование процесса осуществляется в рамках механики многокомпонентной многофазной фильтрации с использованием осредненных величин фильтрационно-емкостных параметров с учетом химической кинетики. На основе предложенной модели исследуются продвижение кислоты и изменение фильтрационных характеристик призабойной зоны пласта в ходе нагнетания реагента. Оценивается влияние режимов нагнетания раствора кислоты на процессы происходящие в призабойной зоне пласта. Выполнены численные расчеты и определены характеристики процесса.

Ключевые слова: абсолютная проницаемость, компонента, концентрация, математическое моделирование, насыщенность, пористые блоки, раствор кислоты, трещины, фаза, фильтрация.

Цитирование: Бурнашев В.Ф., Хужаёров Б.Х., Ахмедов О. Моделирование кислотного воздействия на призабойную зону пласта нефтяных месторождений с карбонатными коллекторами с учетом трещиноватости породы // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 39–57.

1 Введение

Кислотная обработка призабойной зоны пласта (ПЗП) является наиболее распространенным методом интенсификации добычи нефти. В процессе разработки нефтяных месторождений в ПЗП существенно ухудшаются коллекторские свойства за счет загрязнения тяжелыми компонентами нефти, взвешенными частицами, поступившими из пласта в ПЗП, что приводит к снижению продуктивности скважин. Коллекторские свойства ПЗП могут снижаться и за счет необратимых деформаций породы, возникающих при снижении пластового давления, т.е. повышении эффективного давления по мере эксплуатации пласта.

Мировой опыт применения кислотной обработки показывает, что эффективность метода остается невысоким, в пределах 30–40 %. Такая ситуация объясняется тем, что процесс кислотного воздействия определяется большим количеством факторов, механизм и степень влияния которых не до конца выяснены. Такое разнообразие влияющих факторов осложняет оценку эффективности процесса кислотной обработки и оптимальный подбор геолого – физических и техникотехнологических параметров играет важную роль для успешности проводимых мероприятий. Отмеченное показывает актуальность проведения исследований процесса кислотного воздействия с учетом основных влияющих факторов.

Значительный интерес вызывает исследование, в том числе математическое моделирование, процессов фильтрации в средах с наличием трещин - узких протяженных каналов высокой проводимости. Развитая трещиноватость как естественного, так и техногенного характера присуща многим типам коллекторов [1]. Несмотря на то обстоятельство, что трещины занимают небольшой относительный объем, за счет высокой проводимости их влияние на добычу углеводородов может быть определяющим [2, 3].

Месторождения с наличием трещиноватости содержат более 20% мировых запасов нефти и газа [4], однако разработка таких месторождений сопряжена с рядом трудностей и часто бывает неэффективной. Например [5], месторождение Circle Ridge в США разрабатывается уже в течение 50 лет, при этом коэффициент извлечения нефти составляет лишь 15%. Аналогичная ситуация наблюдается на Талинской площади Краснотинского месторождения [6] - большая часть месторождения разбурена тысячами скважин, однако добыто менее 10% начальных запасов, при этом в течение последних 20 лет наблюдается высокая заводненность резервуара. Дополнительно, в связи с высоким спросом на углеводородное сырье в процесс разработки включаются месторождения с низкими пористостью и проницаемостью, а также, например, карбонатные коллекторы, склонные к образованию трещин. В первом случае образование трещин идет вследствие так называемого гидроразрыва пласта, являющегося одним из основных методов повышения нефтеотдачи [7]. Во втором случае из-за хрупкости породы трещины могут образовываться естественным образом в процессе разработки месторождения [6].

Исследование фильтрационных процессов в средах с нарушениями в виде трещин имеет более широкое значение: задачи многофазной многокомпонентной фильтрации в таких средах возникают, например, при моделировании процессов в ядерных реакторах, а также в исследовании распространения загрязнений при захоронении отходов [8].

Разделяют чисто трещиноватые и трещиновато-пористые среды [9]. Первые из них представляют собой блоки, между которыми имеются трещины, причем сами блоки непроницаемы и не обмениваются жидкостью с трещинами. В трещиновато-пористой среде блоки представляют собой куски обычной пористой среды, обладающей пористостью и проницаемостью. В обоих случаях объем трещин пренебрежимо мал по сравнению с общим объемом, занятым твердым скелетом и пустотами, в большинстве случаев он мал и по сравнению с общим объемом пустот, в который входят объемы порового пространства поровых блоков и самих трещин.

Фильтрация в чисто трещиноватых средах происходит качественно так же, как в обычных пористых [10], с некоторыми количественными отклонениями: в частности, усреднение в данном случае ведется не по размерам пор, а по размерам блоков. В середине прошлого века в работах [11, 12] была предложена модель двойной пористости и двойной проницаемости, в которой среда представляется в виде двух сообщающихся между собой континуумов, причем система трещин предполагается связной. Необходимо отметить, что при использовании в численных расчетах модели двойной среды происходит удвоение числа неизвестных, что может оказаться критичным для рассмотрения сложных многофазных многокомпонентных неизотермических течений с учетом химических реакций. В работе [13] для учета субсейсмических трещин, характерное расстояние между которыми достаточно велико - порядка 10 м, а протяженность порядка 10² м, была построена модель single porosity, описывающая свойства среды в рамках единого континуума, при этом как абсолютная, так и

относительные фазовые проницаемости имели скалярный характер, а для описания этапа быстрого продвижения воды по трещинам последние обладали специфическим видом. Такое приближение оказалось разумным, и авторам удалось уловить в расчетах с помощью этой модели особенности заводнения пилотного участка одного из крупнейших месторождений Ближнего Востока. Следует отметить, что размеры субсейсмических трещин, а также то обстоятельство, что, как правило [13–15], на этапе расчета фильтрационных течений геометрия трещин считается заданной, позволяют говорить о детерминированном распределении особенностей в виде трещин в некоторой среде, эффективные фильтрационные параметры которой требуется определить.

Из практики известно, что во многих случаях среда обладает анизотропией, причем примером объекта, проявляющего значительные анизотропные свойства, является именно трещиноватая среда. Анализ возникающего в связи с этим обстоятельством вопроса об учитывающем анизотропию выражении для перетока между трещинами и матрицей в модели двойной среды проведен в [16] и ограничивается теоретическими выкладками для случая напорного механизма обмена между матрицей и трещинами [17], что затрудняет его использование в общем случае. Подход *single porosity* в ряде задач оказывается эффективным, однако требует более корректного учета анизотропии, особенно в многофазном случае [18].

Другой особенностью процессов фильтрации жидкостей в трещиноватых средах является наличие множества характерных масштабов, как по времени, так и по пространству. Что касается пространственных масштабов, в большинстве случаев объем трещин значительно меньше объема порового пространства. Таким образом, в трещиноватых средах имеет место существенная разномасштабность по пространству. В силу того, что проницаемость системы трещин во много раз больше проницаемости поровых каналов, скорость движения жидкости по трещинам значительно больше скорости движения по порам, что приводит к разным временным масштабам.

В работе [19] используется подход независимой фильтрации по двум направлениям, при этом для симметризации налагаются дополнительные ограничения, приводящие к переопределенной системе. В работе [20] среда рассматривается как система параллельных друг другу слоев, что затрудняет применение предложенного в ней метода в более сложных случаях. В [21] доказана эквивалентность двух вышеперечисленных критериев для метода, предложенного в [22]. Кроме того, показано, что тензор проницаемости, получаемый при помощи данного метода, симметричный и положительно определенный. Недостатком является предположение об определенном виде граничных условий, а именно их периодичности, что налагает ограничение на класс рассматриваемых полей проницаемости [23].

Многочисленные экспериментальные данные [24, 25] демонстрируют наличие определенных видов симметрии трещиноватых сред, поэтому анализ фильтрационных свойств таких объектов, особенно в многофазном случае, представляет значительный интерес. В [26] отмечается, что движение жидкостей и газов, и в особенности многофазных веществ, в трещиновато–пористом пласте обладает целым рядом особенностей. В трещиновато–пористом пласте емкостью и проводимостью обладают как блоки породы, так и сами трещины. Если блоки породы непроницаемые, то системе трещин можно считать своеобразной фильтрующей средой. Уравнение неустановившегося движения однородной жидкости в такой среде (в случае, конечно, слабой сжимаемости среды) будет вполне аналогичным уравнению движения однородной жидкости в обычной пористой среде, т. е. уравнению типа теплопроводности. Если же трещины в трещиновато–пористом пласте каким–то образом сделать непрони-

цаемыми в продольном направлении, но проницаемыми в поперечном направлении, то, учитывая, что объем трещин обычно невелик по сравнению с поровым объемом блоков, трещиновато — пористый пласт превратится практически в обычную пористую среду. Таким образом, трещиновато—пористая среда может в пределе «превращаться» как в среду с чисто трещинной пористостью, так и в обычную пористую среду. В общем же случае эта среда содержит признаки как пористой, так и чисто трещинной среды. Поэтому при математическом описании движения однородной жидкости в трещиновато—пористой среде естественно представить эту среду в виде «вложенных» друг в друга пористой и трещинной сред. При установившемся движении жидкости в трещиновато—пористой среде эта среда будет вести себя как среда, проводимость которой равна сумме проводимостей пористой и трещинной сред. Если же движение жидкости в трещиновато—пористой среде не установившееся, вступит в действие явление обмена жидкостью между системой блоков и системой трещин.

В [25, 26] предполагается, что при закачке в трещиновато-пористый пласт воды она вытесняет нефть из трещин, а из блоков породы в трещины поступает нефть за счет капиллярной пропитки. Математическому моделированию процессов фильтрации жидкостей и газов в пористой среде при кислотном воздействии на неё посвящены работы [27, 28].

В данной работе представлена математическая модель кислотного воздействия на ПЗП нефтяных месторождений с карбонатными трещиновато-пористыми коллекторами. В отличие от [25, 26] вытеснение нефти происходит из трещин и пористых блоков. В отличие от [27, 28] рассматривается трещиновато-пористый коллектор.

Сложность системы дифференциальных уравнений описывающих кислотное воздействие на ПЗП нефтяных и газовых месторождений с карбонатными коллекторами и их нелинейность не позволяют проводить аналитические исследования, поэтому лишь численные методы с исследованием на ЭВМ и тщательно проведенные физические эксперименты позволяют дать достаточно точное решение. Обзор некоторых методов приближенного моделирования фильтрационных течений в неоднородных по толщине нефтяных пластах, а также численных методов их решения дан Халиловым, Леви и др. [29].

Обзор известных численных методов решения одномерных задач фильтрации несмешивающихся жидкостей дан в работе Джонсона и др. [30]. В первой части обзора рассматриваются аналитические свойства решения уравнения Баклея-Левретта: непрерывные решения, образования скачков, графические способы построения разрывных решений методом характеристик. Во второй части рассматриваются численные методы: метод характеристик, конечно-разностные методы и метод конечных элементов. Развитие численных методов привело к созданию нового мощного средства исследования “вычислительному эксперименту” [31]. В частности, в Вычислительном центре АН СССР был осуществлен ряд численных экспериментов по исследованию сложных газодинамических течений с использованием нестационарного метода “крупных частиц” [32]. В [33], [34] излагается численный алгоритм расчета одно- и двумерных процессов трехфазной фильтрации, основанный на методе “крупных частиц” использующий схему сквозного счета, позволяющий непрерывным образом производить расчет различных областей фильтрации. В работе [35] исследуется устойчивость численных схем модифицированного метода “крупных частиц” для нестационарной неизотермической многофазной фильтрации. Получены критерии устойчивости схемы модифицированного метода «крупных частиц» в целом.

2 Постановка задачи

Полагаем, что в процессе фильтрации в нефте-водонасыщенной трещиновато-пористой среде участвуют водная фаза, состоящая из кислотной, солевой, газовой и собственно водной компонент, и нефтяная фаза. В отдельную фазу, не принимающую участия в фильтрации, выделяется порода (скелет трещиновато-пористой среды). Образующийся в результате реакции кислоты с карбонатом газ в воде растворяется не полностью. Порода растворяется кислотой лишь частично. Капиллярные силы не учитываются.

Математическая модель кислотной обработки призабойной зоны трещиновато-пористого нефтяного пласта с карбонатным коллектором можно представить в виде уравнений.

- Уравнение сохранения массы кислотной компоненты, внедряемой в пласт:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(m^{(i)} \rho_a c_a^{(i)} S_w^{(i)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_a c_a^{(i)} V_w^{(i)} \right) = -J_a^{(i)} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_a D^{(i)} m^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} (c_a^{(i)} S_w^{(i)}) \right) + (-1)^{i-1} q_a \quad (1)$$

где $J_a^{(i)} = M_a a_\nu^{(i)} R_a^{(i)}$ - масса кислоты, израсходованной в единицу времени в единице объема, $R_a^{(2)} = E_f \left(\frac{c_a^{(2)} \rho_a}{M_a} \right)$ - скорость химической реакции, $E_f = E_f^0 \exp \left(-\frac{\Delta E}{RT} \right)$ - константа скорости реакции определяется соотношением Аррениуса (ΔE - энергия активации, R - газовая постоянная), M_a - молекулярный вес кислоты; $V_w^{(i)}$ - скорость фильтрации водной фазы; $m^{(i)}$ - пористость; ρ_a - истинная плотность кислоты; $c_a^{(i)}$ - массовая концентрация кислоты; $S_w^{(i)}$ - насыщенность порового пространства водным раствором; $D^{(i)}$ - коэффициент молекулярной диффузии; t - время; $a_\nu^{(i)} = s^{(i)} / v^{(i)}$ удельная поверхность реакции, $s^{(i)}$ - площадь поверхности реакции, $v^{(i)}$ - объем ПЗП; $q_a = \begin{cases} \rho_a c_a^{(2)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} \geq 0 \\ \rho_a c_a^{(1)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} < 0 \end{cases}$ - массовая скорость обмена кислотой между пористыми блоками и системой трещин, α_w - коэффициент, характеризующий интенсивность обмена водного раствора между системами блоков и трещин, μ_w - вязкость водного раствора, $p^{(i)}$ - давление; $i = 1, 2$: 1 - трещины, 2 - пористые блоки.

- Уравнение сохранения массы соли хлористого кальция, растворенной в воде, образующейся в результате химической реакции:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(m^{(i)} \rho_{sc} c_{sc}^{(i)} S_w^{(i)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_{sc} c_{sc}^{(i)} V_w^{(i)} \right) = J_{sc}^{(i)} + (-1)^{i-1} q_{sc} \quad (2)$$

где $J_{sc}^{(i)} = \gamma_{sc}^{(i)} J_a^{(i)}$ - масса соли хлористого кальция, возникшей в результате реакции в единицу времени в единице объема, $\gamma_{sc}^{(i)}$ - отношение, участвующих в реакции, молярных весов соли хлористого кальция и кислоты; $c_{sc}^{(i)}$ - концентрация соли хлористого кальция; ρ_{sc} - плотность соли хлористого кальция, $q_{sc} = \begin{cases} \rho_{sc} c_{sc}^{(2)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} \geq 0 \\ \rho_{sc} c_{sc}^{(1)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} < 0 \end{cases}$ - массовая скорость обмена соли хлористого кальция между пористыми блоками и системой трещин.

- Уравнение сохранения массы соли хлористого магния, растворенной в воде, образующейся в результате химической реакции:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(m^{(i)} \rho_{sm} c_{sm}^{(i)} S_w^{(i)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_{sm} c_{sm}^{(i)} V_w^{(i)} \right) = J_{sm}^{(i)} + (-1)^{i-1} q_{sm} \quad (3)$$

где $J_{sm}^{(i)} = \gamma_{sm}^{(i)} J_a^{(i)}$ - масса соли хлористого магния, возникшей в результате реакции в единицу времени в единице объема, $\gamma_{sm}^{(i)}$ - отношение, участвующих в реакции, молярных весов соли хлористого магния и кислоты; $c_{sm}^{(i)}$ - концентрация соли хлористого магния; ρ_{sm} - плотность соли хлористого магния;

$q_{sm} = \begin{cases} \rho_{sm} c_{sm}^{(2)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} \geq 0 \\ \rho_{sm} c_{sm}^{(1)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} < 0 \end{cases}$ - массовая скорость обмена соли хлористого магния между пористыми блоками и системой трещин.

- Уравнение сохранения массы водной компоненты, образующейся в результате химической реакции и внедряемой в пласт:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m^{(i)} \rho_w^0 c_w^{(i)} S_w^{(i)}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_w^0 c_w^{(i)} V_w^{(i)}) = J_w^{(i)0} + (-1)^{i-1} q_w^0 \quad (4)$$

где $J_w^{(0)i} = \gamma_w^{(i)} J_a^{(i)}$ - масса воды, возникшей в результате реакции в единицу времени в единице объема, $\gamma_w^{(i)}$ - отношение, участвующих в реакции, молярных весов воды и кислоты; $c_w^{(i)}$ - массовая концентрация воды; ρ_w^0 - плотность воды,

$q_w^0 = \begin{cases} \rho_w^0 c_w^{(2)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} \geq 0 \\ \rho_w^0 c_w^{(1)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} < 0 \end{cases}$ - массовая скорость обмена водой между пористыми блоками и системой трещин.

- Уравнение сохранения массы углекислого газа, образующегося в результате химической реакции:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m^{(i)} \rho_g c_g^{(i)} S_w^{(i)}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g c_g^{(i)} V_w^{(i)}) = J_g^{(i)} + (-1)^{i-1} q_g \quad (5)$$

где $c_g^{(i)}$ - концентрация углекислого газа в воде; ρ_g - истинная плотность углекислого газа; $J_g^{(i)} = \gamma_g^{(i)} J_a^{(i)}$ - масса углекислого газа, образованного в единицу времени в единице объема, $\gamma_g^{(i)}$ - отношение, участвующих в реакции, молярных весов углекислого

газа и кислоты; $q_g = \begin{cases} \rho_g c_g^{(2)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} \geq 0 \\ \rho_g c_g^{(1)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} < 0 \end{cases}$ - массовая скорость обмена углекислого газа между пористыми блоками и системой трещин.

- Уравнение сохранения массы не растворимых частиц породы, образующегося в результате химической реакции:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m^{(i)} \rho_b c_b^{(i)} S_w^{(i)}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_b c_b^{(i)} V_w^{(i)}) = J_b^{(i)} + (-1)^{i-1} q_b \quad (6)$$

где $c_d^{(i)}$ - концентрация не растворимых частиц породы в воде; ρ_b - истинная плотность не растворимых частиц породы; $J_b^{(i)} = \gamma_b^{(i)} J_a^{(i)}$ - масса не растворимых частиц породы, образованного в единицу времени в единице объема, $\gamma_b^{(i)}$ - отношение, участвующих в реакции, молярных весов не растворимых частиц породы и кисло-

ты; $q_b = \begin{cases} \rho_b c_b^{(2)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} \geq 0 \\ \rho_b c_b^{(1)} \frac{\alpha_w}{\mu_w} (p^{(2)} - p^{(1)}) & \text{при } p^{(2)} - p^{(1)} < 0 \end{cases}$ - массовая скорость обмена не растворимыми частицами породы между пористыми блоками и системой трещин.

- Уравнение сохранения массы водной фазы:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m^{(i)} \rho_w^{(i)} S_w^{(i)}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_w^{(i)} V_w^{(i)}) = J_w^{(i)} + (-1)^{i-1} q_w \quad (7)$$

где

$$J_w^{(i)} = -J_a^{(i)} + J_{sc}^{(i)} + J_{sm}^{(i)} + J_w^{0(i)} + J_b^{(i)} + J_g^{(i)},$$

$$\rho_w^{(i)} = c_A^{(i)} \rho_A + c_{sc}^{(i)} \rho_{sc} + c_{sm}^{(i)} \rho_{sm} + c_w^{(i)} \rho_w^0 + c_b^{(i)} \rho_b + c_g^{(i)} \rho_g$$

$$q_w = q_w^0 + q_a + q_{sc} + q_{sm} + q_b + q_g.$$

- Уравнение сохранения массы нефтяной фазы:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m^{(i)} \rho_o S_o^{(i)}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_o V_o^{(i)}) = (-1)^{i-1} q_o \quad (8)$$

где $S_o^{(i)}$ - насыщенность порового пространства нефтью; ρ_o - плотность нефти; $q_o = \rho_o \alpha_o (p^{(2)} - p^{(1)})$ - массовая скорость обмена газом между пористыми блоками и системой трещин, $\alpha_o = K^{(2)} a_v^{(2)2} / \mu_o$ - коэффициент, характеризующий интенсивность обмена нефтью между системами блоков и трещин, μ_o - вязкость газа.

- Уравнение сохранения массы скелета породы:

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - m^{(2)} - m^{(1)}) \rho_m) = -J_m^{(i)} \quad (9)$$

где $J_m^{(i)} = \gamma_m^{(i)} J_a^{(i)}$ - масса минерала, растворенного в единицу времени в единице объема, $\gamma_m^{(i)}$ - отношение, участвующих в реакции, молярных весов минерала и кислоты; ρ_m - истинная плотность породы.

Уравнение изменения положения фронта кислоты:

$$\frac{dx_f^{(i)}}{dt} = \gamma_m^{(i)} \frac{\rho_a}{\rho_m} V_{fa}^{(i)} c_{fa}^{(i)} \quad (10)$$

где $V_{fa}^{(i)}$ и $c_{fa}^{(i)}$ - скорость потока и концентрация кислоты на фронте кислоты.

Для скорости фильтрации фаз используется закон Дарси:

$$V_w^{(i)} = -\frac{K^{(i)} k_w^{(i)}}{\mu_w} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial x}, \quad V_o^{(i)} = -\frac{K^{(i)} k_o^{(i)}}{\mu_o} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial x}, \quad (11)$$

где $K^{(i)}$, $k_w^{(i)}$, $k_o^{(i)}$ - абсолютная и относительные фазовые проницаемости воды и нефти.

Для вычисления абсолютной проницаемости используется следующая эмпирическая зависимость:

$$K^{(i)} = K_0^{(i)} \left(\frac{m^{(i)}}{m_0^{(i)}} \right)^{\eta^{(i)}} \quad (12)$$

где $\eta^{(i)}$ - константы, определяемые по экспериментальным данным; $K_0^{(i)}$ - начальная пористость и абсолютная проницаемость.

- Уравнение изменения удельной поверхности реакции принимается в виде:

$$a_v^{(i)} = a_0^{(i)} \frac{(1 - m^{(2)} - m^{(1)})}{(1 - m_0^{(2)} - m_0^{(1)})} \quad (13)$$

где $a_0^{(i)}$, $m_0^{(i)}$ - начальная удельная поверхность и пористость.

Добавляя очевидные равенства

$$\begin{aligned} S_o^{(i)} + S_w^{(i)} &= 1, \\ c_a^{(i)} + c_{sc}^{(i)} + c_{sm}^{(i)} + c_w^{(i)} + c_b^{(i)} + c_g^{(i)} &= 1; \end{aligned} \quad (14)$$

уравнения состояния

$$\begin{aligned} \rho_w^0 &= \rho_w^0(p), \quad \rho_o = \rho_o(p), \quad \rho_\alpha = \rho_\alpha(p), \\ \alpha &= \{a, sc, sm, g, b\}; \end{aligned} \quad (15)$$

зависимости для вязкостей

$$\mu_w^{(i)} = \mu_w^{(i)}(p), \quad \mu_o = \mu_o(p) \quad (16)$$

и относительных фазовых проницаемостей

$$\begin{aligned} k_o^{(i)} &= \begin{cases} \frac{(1-S_w^{(i)})}{(1-S_{we}^{(i)})} & S_w^{(i)} > S_{we}^{(i)} \\ 1 & S_w^{(i)} \leq S_{we}^{(i)} \end{cases}, \\ k_w^{(i)} &= \begin{cases} \frac{(S_w^{(i)}-S_{we}^{(i)})}{(1-S_{we}^{(i)})} & S_w^{(i)} > S_{we}^{(i)} \\ 0 & S_w^{(i)} \leq S_{we}^{(i)} \end{cases}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $S_{we}^{(i)}$ - остаточная водонасыщенность; начальные условия

$$\begin{aligned} p^{(i)}(x, 0) &= p^{(i)0}, \quad m^{(i)}(x, 0) = m^{(i)0}, \quad S_w^{(i)}(x, 0) = S_w^{(i)0}, \\ S_o^{(i)}(x, 0) &= S_o^{(i)0}, \quad c_\alpha^{(i)}(x, 0) = c_\alpha^{(i)0}, \quad \alpha = \{a, sc, sm, g, b\}; \end{aligned} \quad (18)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} V_w^{(i)}(0, t) &= V_w^{(i)c}(t), \quad S_w^{(i)}(0, t) = 1, S_o^{(i)}(0, t) = 0, \\ c_\alpha^{(i)}(0, t) &= c_\alpha^{(i)c}(t), \quad \alpha = \{o, a, sc, sm, g, b\}, \\ p^{(i)}(L, t) &= p^{(i)0}, \quad \left. \frac{\partial c_a^{(i)}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

получим замкнутую систему уравнений (1) – (19), описывающих физико-химические процессы, происходящие в призабойной зоне трещиновато-пористого газового пласта при ее кислотной обработке.

3 Метод решения

Применим алгоритм метода "крупных частиц" к задаче кислотного воздействия на ПЗП нефтяных месторождений с учетом трещиноватости породы. Следуя логике протекающих процессов, нестационарную систему уравнений (1) – (19) расщепляем по физическим процессам и в области ПЗП

$$\Omega = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq \tau\}$$

строим пространственно временную эйлерову сетку

$$\begin{aligned} \Omega_{nj} &= \{t_{n-1} = t_n - \Delta t, \quad n = \overline{1, N_t}; \\ x_{j-1} &= x_j - \Delta x, \quad j = \overline{1, N_x}\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Среду моделируем системой из жидких частиц, совпадающих в данный момент времени с ячейкой эйлеровой сетки. Расчет каждого временного шага разбиваем на три этапа:

1 этап - пренебрегаем эффектами, связанными с перемещением элементарной ячейки и вычисляем изменение массы каждой фазы и компоненты за счет внутренних процессов в момент времени t_n

$$\begin{aligned} (mc_a c_a S_w)_j^{(i)\sim} &= (mc_a c_a S_w)_j^{(i)n} + \Delta t (J_a)_j^{(i)n} + \\ &+ \Delta t (-1)^{i-1} (q_a)_j^n + \frac{\Delta t D^{(i)}}{\Delta x} \left\{ (m\rho_a)_{j-1/2}^{(i)n} (c_a S_w)_{j-1}^{(i)n} - \right. \\ &- \left[(m\rho_a)_{j-1/2}^{(i)n} + (m\rho_a)_{j+1/2}^{(i)n} \right] (c_a S_w)_j^{(i)n} + \\ &\left. + (m\rho_a)_{j+1/2}^{(i)n} (c_a S_w)_{j+1}^{(i)n} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (J_a)_j^{(i)n} &= M_a (a_v)_j^{(i)n} R_a^{(i)}, \quad R_a^{(i)} = E_f \left(\frac{c_a \rho_a}{M_a} \right)_j^{(i)}, \\ E_f &= E_f^0 \exp \left(-\frac{\Delta E}{RT} \right), \quad (a_v)_j^{(i)n} = a_{0j}^{(i)} \frac{(1 - m^{(i)})_j^n}{(1 - m_0^{(i)})_j^n}, \\ (q_a)_j^n &= \begin{cases} \left[\rho_a \left(c_a^{(2)} \right) \alpha_w (p^{(2)} - p^{(1)}) \right]_j^n & (p^{(2)} - p^{(1)})_j^n \geq 0, \\ \left[\rho_a \left(c_a^{(1)} \right) \alpha_w (p^{(2)} - p^{(1)}) \right]_j^n & (p^{(2)} - p^{(1)})_j^n < 0, \end{cases} \\ \alpha_{wj}^n &= \left[K^{(2)} a_v^{(2)2} / \mu_w \right]_j^n \\ (m\rho_{sc} c_{sc} S_w)_j^{(i)\sim} &= (m\rho_{sc} c_{sc} S_w)_j^{(i)n} + \Delta t (J_{sc})_j^{(i)n} + \Delta t (-1)^{i-1} (q_{sc})_j^n, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (J_{sc})_j^{(i)n} &= [\gamma_{sc}^{(i)} J_a^{(i)}]_j^n, \\ (q_{sc})_j^n &= \begin{cases} \left[\rho_{sc} \left(c_{sc}^{(2)} \right) \alpha_w (p^{(2)} - p^{(1)}) \right]_j^n & (p^{(2)} - p^{(1)})_j^n \geq 0, \\ \left[\rho_{sc} \left(c_{sc}^{(1)} \right) \alpha_w (p^{(2)} - p^{(1)}) \right]_j^n & (p^{(2)} - p^{(1)})_j^n < 0, \end{cases} \\ (m\rho_{sm} c_{sm} S_w)_j^{(i)\sim} &= (m\rho_{sm} c_{sm} S_w)_j^{(i)n} + \Delta t (J_{sm})_j^{(i)n} + \Delta t (-1)^{i-1} (q_{sm})_j^n \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (J_w^0)_j^{(i)} &= [\gamma_w^{(i)} J_a^{(i)}]_j^n, \\ (q_w^0)_j^n &= \begin{cases} \left[\rho_w^0 \left(c_{sm}^{(2)} \right) \alpha_w (p^{(2)} - p^{(1)}) \right]_j^n & (p^{(2)} - p^{(1)})_j^n \geq 0, \\ \left[\rho_w^0 \left(c_{sm}^{(1)} \right) \alpha_w (p^{(2)} - p^{(1)}) \right]_j^n & (p^{(2)} - p^{(1)})_j^n < 0, \end{cases} \\ (m\rho_w^0 c_w S_w)_j^{(i)\sim} &= (m\rho_w^0 c_w S_w)_j^{(i)n} + \Delta t (J_w^0)_j^{(i)} + \Delta t (-1)^{i-1} (q_w^0)_j^n, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
(J_w^0)_j^{(i)} &= [\gamma_w^{(i)} J_a^{(i)}]_j^n, \\
(q_w^0)_j^n &= \begin{cases} \left[\rho_w^0 \left(c_{sm}^{(2)} \right) \alpha_w \left(p^{(2)} - p^{(1)} \right) \right]_j^n & (p^{(2)} - p^{(1)})_j^n \geq 0 \\ \left[\rho_w^0 \left(c_{sm}^{(1)} \right) \alpha_w \left(p^{(2)} - p^{(1)} \right) \right]_j^n & (p^{(2)} - p^{(1)})_j^n < 0 \end{cases}, \\
(m\rho_w S_w)_j^{(i)\sim} &= (m\rho_w S_w)_j^{(i)n} + \Delta t (J_w)_j^{(i)n} + \Delta t (-1)^{i-1} (q_w)_j^n,
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
(J_w)_j^{(i)n} &= -(J_a)_j^{(i)n} + (J_{sc})_j^{(i)n} + (J_w^0)_j^{(i)n}, \\
\rho_{wj}^{(i)n} &= [c_a \rho_a + c_{sc} \rho_{sc} + c_w \rho_w^0]_j^{(i)n}, \\
(q_w)_j^n &= [q_w^0 + q_a + q_{sc}]_j^n, \\
(m_o^* S_o)_j^{(i)\sim} &= (m_o^* S_o)_j^{(i)n} + \Delta t (-1)^{i-1} (q_o^*)_j^n,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
(q_o^*)_j^n &= \left[\rho_{o0}^* \alpha_o \left(p^{(2)^2} - p^{(1)^2} \right) / p_0 \right]_j^n, \\
\alpha_o^n &= \left[K^{(2)} a_v^{(2)^2} / \mu_o \right]_j^n, \\
(m c_m)_j^{(i)\sim} &= (m c_m)_j^{(i)n} + \Delta t (J_m)_j^{(i)n},
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
J_{mj}^{(i)n} &= \gamma_m^{(i)} J_{aj}^{(i)n}, \\
(K)_j^{(i)\sim} &= K_0^{(i)} \left[\frac{(m)_j^{(i)}}{m_0^{(i)}} \right]^n, \\
(x_F)_j^{(i)} &= (x_F)_j^{(i)n} + \Delta t \left(\gamma_M \frac{\rho_A}{\rho_M} V_{FA} C_{FA} \right)_j^{(i)n},
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\tilde{\alpha}_{j-1/2}^{(i)} \tilde{p}_{j-1}^{(i)} - \left(\tilde{\alpha}_{j-1/2}^{(i)} + \tilde{\alpha}_{j+1/2}^{(i)} \right) \tilde{p}_j^{(i)} + \tilde{\alpha}_{j+1/2}^{(i)} \tilde{p}_{j+1}^{(i)} = -\tilde{F}_j^{(i)}, \tag{29}$$

$$(V_w)_j^{(i)\sim} = - \left(\frac{K k_w}{\mu_w} \right)_j^{(i)\sim} \frac{\tilde{p}_{j+1/2}^{(i)} - \tilde{p}_{j-1/2}^{(i)}}{\Delta x}, \tag{30}$$

$$(V_o)_j^{(i)\sim} = - \left(\frac{K k_o}{\mu_o} \right)_j^{(i)\sim} \frac{\tilde{p}_{j+1/2}^{(i)} - \tilde{p}_{j-1/2}^{(i)}}{\Delta x}. \tag{31}$$

II этап - вычисляем перенос массы и энергии каждой фазы и компонент через границы ячеек. Потоки фаз и компонент через границы ячеек рассчитываются по формулам

$$\Delta(M c_a)_{j+1/2}^{(i)} = \begin{cases} (\rho_a c_a)_j^{(i)\sim} (V_w)_{j+1/2}^{(i)\sim} \Delta t, & (V_w)_{j+1/2}^{(i)\sim} > 0, \\ (\rho_a c_a)_{j+1}^{(i)\sim} (V_w)_{j+1/2}^{(i)\sim} \Delta t, & (V_w)_{j+1/2}^{(i)\sim} < 0, \end{cases} \tag{32}$$

$$\Delta(M c_{sc})_{j+1/2}^{(i)} = \begin{cases} (\rho_{sc} c_{sc})_j^{(i)\sim} (V_w)_{j+1/2}^{(i)\sim} \Delta t, & (V_w)_{j+1/2}^{(i)\sim} > 0, \\ (\rho_{sc} c_{sc})_{j+1}^{(i)\sim} (V_w)_{j+1/2}^{(i)\sim} \Delta t, & (V_w)_{j+1/2}^{(i)\sim} < 0, \end{cases} \tag{33}$$

$$\Delta(Mc_{sm})^{(i)}_{j+1/2} = \begin{cases} (\rho_{sm}c_{sm})^{(i)\sim}_j (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} \Delta t, (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} > 0, \\ (\rho_{sm}c_{sm})^{(i)\sim}_{j+1} (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} \Delta t, (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} < 0, \end{cases} \quad (34)$$

$$\Delta(Mc_w)^{(i)}_{j+1/2} = \begin{cases} (\rho_w^0 c_w)^{(i)\sim}_j (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} \Delta t, (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} > 0, \\ (\rho_w^0 c_w)^{(i)\sim}_{j+1} (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} \Delta t, (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} < 0, \end{cases} \quad (35)$$

$$\Delta(M_w)^{(i)}_{j+1/2} = \begin{cases} (\rho_w)^{(i)\sim}_j (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} \Delta t, (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} > 0, \\ (\rho_w)^{(i)\sim}_{j+1} (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} \Delta t, (V_w)^{(i)\sim}_{j+1/2} < 0, \end{cases} \quad (36)$$

$$\Delta(M_o)^{(i)}_{j+1/2} = \begin{cases} (\rho_o)^{(i)\sim}_j (V_o)^{(i)\sim}_{j+1/2} \Delta t, (V_o)^{(i)\sim}_{j+1/2} > 0, \\ (\rho_o)^{(i)\sim}_{j+1} (V_o)^{(i)\sim}_{j+1/2} \Delta t, (V_o)^{(i)\sim}_{j+1/2} < 0. \end{cases} \quad (37)$$

III этап - на основании законов сохранения находим значения параметров фаз и их компонент на новом временном слое

$$\begin{aligned} (m\rho_a c_a S_w)^{(i)n+1}_j &= (m\rho_a c_a S_w)^{(i)\sim}_j + \\ &+ \frac{1}{\Delta x} [\Delta(Mc_a)^{(i)}_{j-1/2} - \Delta(Mc_a)^{(i)}_{j+1/2}], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} (m\rho_{sc} c_{sc} S_w)^{(i)n+1}_j &= (m\rho_{sc} c_{sc} S_w)^{(i)\sim}_j + \\ &+ \frac{1}{\Delta x} [\Delta(Mc_{sc})^{(i)}_{j-1/2} - \Delta(Mc_{sc})^{(i)}_{j+1/2}], \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} (m\rho_{sm} c_{sm} S_w)^{(i)n+1}_j &= (m\rho_{sm} c_{sm} S_w)^{(i)\sim}_j + \\ &+ \frac{1}{\Delta x} [\Delta(Mc_{sm})^{(i)}_{j-1/2} - \Delta(Mc_{sm})^{(i)}_{j+1/2}], \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} (m\rho_w^0 c_w S_w)^{(i)n+1}_j &= (m\rho_w^0 c_w S_w)^{(i)\sim}_j + \\ &+ \frac{1}{\Delta x} [\Delta(Mc_w)^{(i)}_{j-1/2} - \Delta(Mc_w)^{(i)}_{j+1/2}], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} (m\rho_w S_w)^{(i)n+1}_j &= (m\rho_w S_w)^{(i)\sim}_j + \\ &+ \frac{1}{\Delta x} [\Delta(M_w)^{(i)}_{j-1/2} - \Delta(M_w)^{(i)}_{j+1/2}], \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} (m\rho_o S_o)^{(i)n+1}_j &= (m\rho_o S_o)^{(i)\sim}_j + \\ &+ \frac{1}{\Delta x} [\Delta(M_o)^{(i)}_{j-1/2} - \Delta(M_o)^{(i)}_{j+1/2}], \end{aligned} \quad (43)$$

$$(m\rho_m)^{(i)n+1}_j = (m\rho_m)^{(i)\sim}_j + \Delta t (J_m)^{(i)n+1}_j, \quad (44)$$

$$(x_f)^{(i)n+1}_j = (x_f)^{(i)\sim}_j + \Delta t \left(\gamma_m \frac{\rho_a}{\rho_m} V_{fa} c_{fa} \right)^{(i)n+1}_j.$$

Разностная схема (21) – (43) устойчива при выполнении условий [35]

$$\frac{\Delta x}{2} |v| - \frac{\Delta x^2}{4} v + \Delta t \left[\left(\frac{\Delta x}{2} |v| - \frac{\Delta x^2}{4} v \right) q_p - \frac{1}{2} (v + \rho v_\rho)^2 \right] > 0. \quad (45)$$

4 Обсуждение результатов

Для исследования влияния различных режимов кислотного воздействия на призабойную зону нефтяного пласта при условии постоянства плотностей и вязкостей жидкостей и газов проведены вычислительные эксперименты с использованием следующих значений параметров: $\rho_a = 1190$ кг/м³, $\rho_{sc} = 1396$ кг/м³, $\rho_{sm} = 1396$ кг/м³, $\rho_o = 807.2$ кг/м³, $\rho_b = 2160$ кг/м³, $\rho_w^0 = 1111.6$ кг/м³, $\rho_m = 2160$ кг/м³, $\rho_g = 1.6$ кг/м³, $D = 10 \cdot 10^{-8}$ м²/с, $\eta = 2$, $\alpha = 10$, $\chi_g = 10$ м⁻¹, $\chi_b = 1$ м⁻¹, $\gamma_{sc} = 0.76098$, $\gamma_{sm} = 0.65283$, $\gamma_w = 0.247051$, $\gamma_g = 0.603523$, $\gamma_b = 0.252877$, $\gamma_m = 1.011507$, $\mu_w = 1.768 \cdot 10^{-6}$ Па·с, $\mu_o = 807.2 \cdot 10^{-6}$ Па·с, $\Delta E_f^0 = 0.51 \cdot 10^{-6}$ м/с, $\Delta E = 86400$, $R = 8314$, $T = 373$ К, $a_0 = 0.3$ м⁻¹, $p^{(1)0} = p^{(2)0} = 0.1$ МПа, $c_w^{(1)0} = 1$, $c_w^{(2)0} = 1$, $S_o^{(1)0} = 0.8$, $S_o^{(2)0} = 0.8$, $V_w^c = 0.135493 \cdot 10^{-5}$ м/с, $c_a^{(1)c} = 0.15$, $c_w^{(1)c} = 0.85$, $c_a^{(2)c} = 0.15$, $c_w^{(2)c} = 0.85$, $L = 3$ м, $t = 2592000$ с, $K_0^{(1)} = 0.048 \cdot 10^{-12}$ м², $K_0^{(2)} = 0.0048 \cdot 10^{-12}$ м², $m_0^{(1)} = 0.03$, $m_0^{(2)} = 0.3$.

На рис. 1-5 представлены результаты численных расчетов при непрерывной закачке раствора кислоты. Их анализ показывает, что изменение абсолютной проницаемости, пористости, давления и концентрации кислоты в пористых блоках и трещинах существенно различаются, как по величине, так и по простиранию (рис.1-4). Наиболее существенные изменения происходят в трещинах. Это связано с тем, что из-за относительно малой проницаемости пористых блоков большая часть нагнетаемой кислоты поступает в трещины. В результате чего давление в окрестности нагнетаемой скважины в трещинах намного ниже, чем в пористых блоках (рис. 4). При этом уже через 2 суток фронт кислоты в трещинах достигает границы ПЗП. То есть основная масса закачиваемой кислоты через трещины, не прореагировав с породой, выходит за пределы ПЗП (рис. 5)..

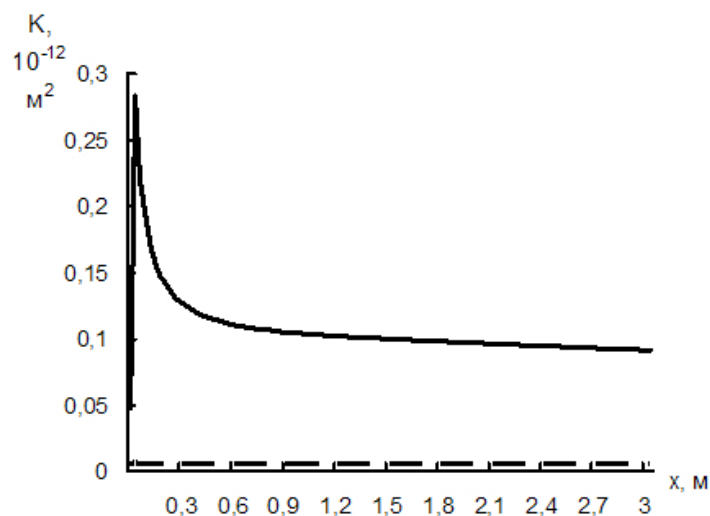


Рис. 1 Распределение проницаемости в ПЗП при непрерывной закачке кислоты: $t = 10$ сут; сплошная линия - трещины, пунктирная – поры.

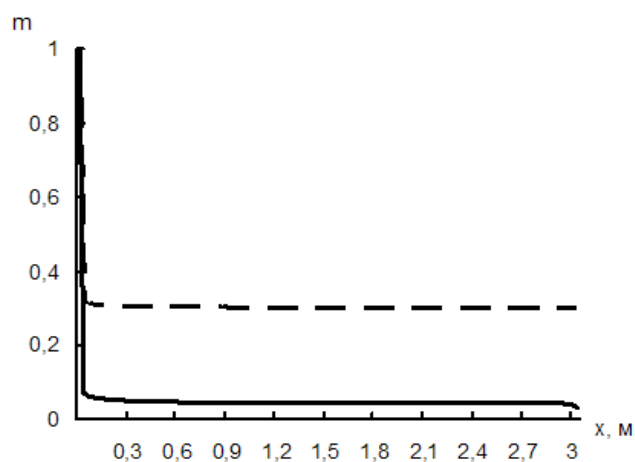


Рис. 2 Распределение пористости в ПЗП при непрерывной закачке кислоты: $t = 10$ сут; сплошная линия - трещины, пунктирная – поры.

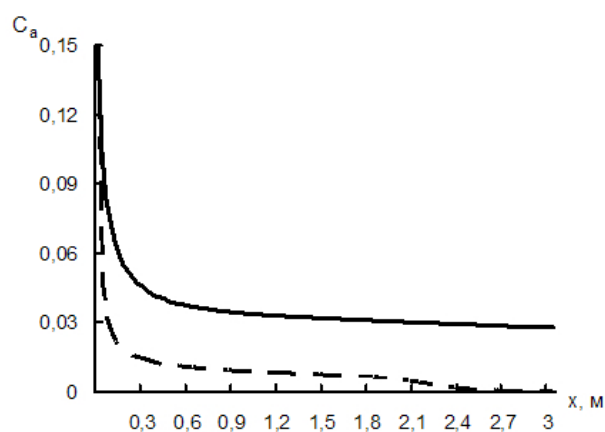


Рис. 3 Распределение концентрации кислоты в ПЗП при непрерывной закачке: $t = 10$ сут; сплошная линия - трещины, пунктирная – поры.

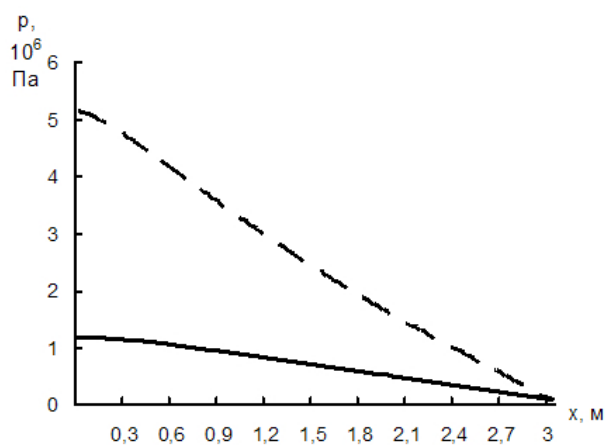


Рис. 4 Распределение давления в ПЗП при непрерывной закачке кислоты: $t = 10$ сут; сплошная линия - трещины, пунктирная – поры.

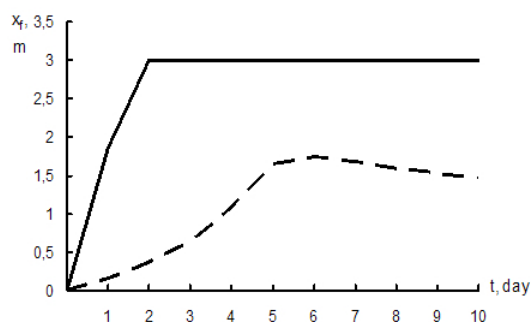


Рис. 5 Положение фронта течения кислоты в ПЗП при непрерывной закачке: сплошная линия - трещины, пунктирная – поры.

В целях исключения раннего прорыва кислоты за пределы ПЗП проведены расчеты при периодической закачке раствора кислоты, результаты которых приведены на рис. 6-9. Изменение режима нагнетания приводит увеличению давления, как в пористых блоках, так и трещинах (рис. 9). Фронт кислоты в пористых блоках не достигает пределов ПЗП (рис. 10). То есть вся нагнетаемая кислота используется для растворения породы.

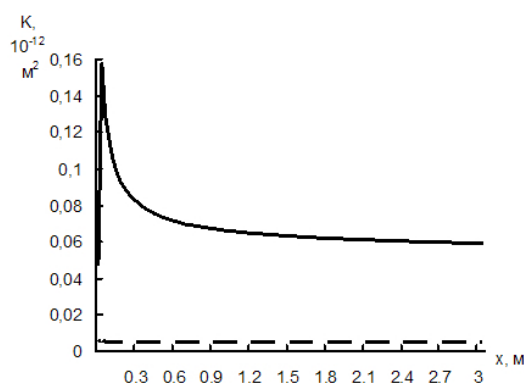


Рис. 6 Распределение проницаемости в ПЗП при периодической закачке кислоты: $t = 10$ сут; сплошная линия - трещины, пунктирная – поры.

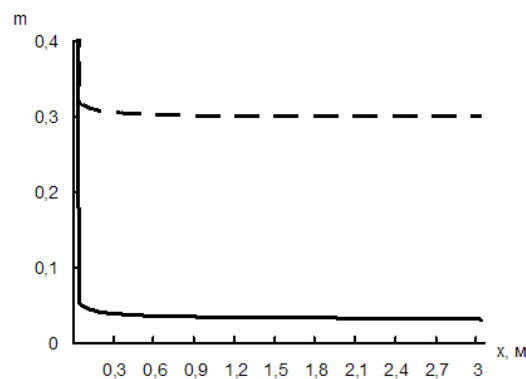


Рис. 7 Распределение пористости в ПЗП при периодической закачке кислоты: $t = 10$ сут; сплошная линия - трещины, пунктирная – поры.

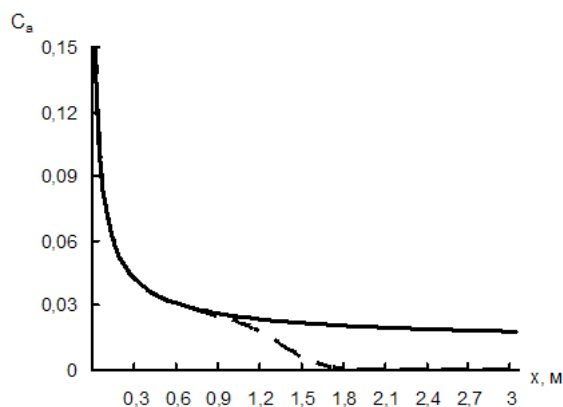


Рис. 8 Распределение концентрации кислоты в ПЗП при периодической закачке: $t = 10$ сут; сплошная линия - трещины, пунктирная – поры.

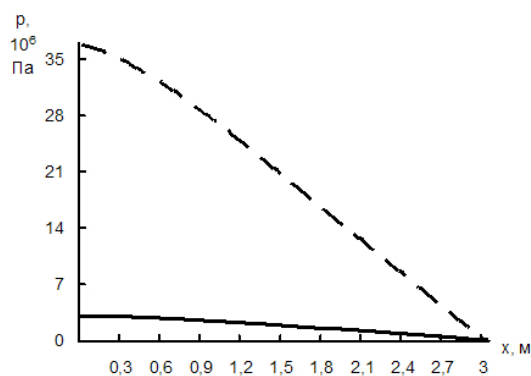


Рис. 9 Распределение давления в ПЗП при периодической закачке кислоты: $t = 10$ сут; сплошная линия - трещины, пунктирная – поры.

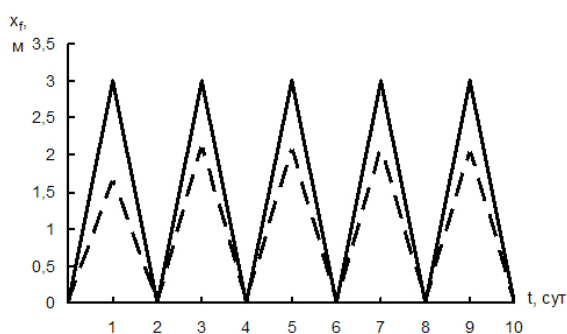
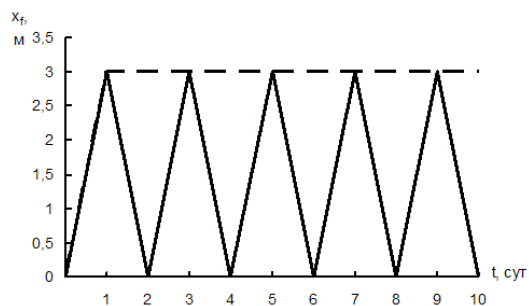


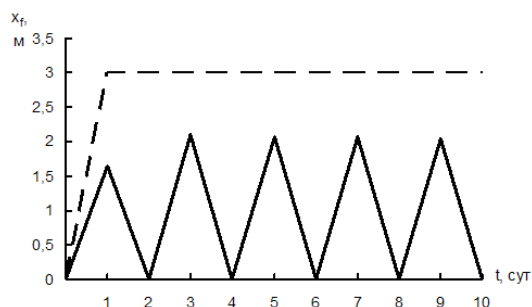
Рис. 10 Положение фронта течения кислоты в ПЗП при периодической закачке: сплошная линия - трещины, пунктирная – поры.

На рис. 11 показано влияние изменения режима закачки раствора кислоты на положение фронта течения кислоты (рис. 11а, 11б) изменение абсолютной проницаемости (рис. 11в, 11г) в пористых блоках и трещинах. Анализ результатов показывает,

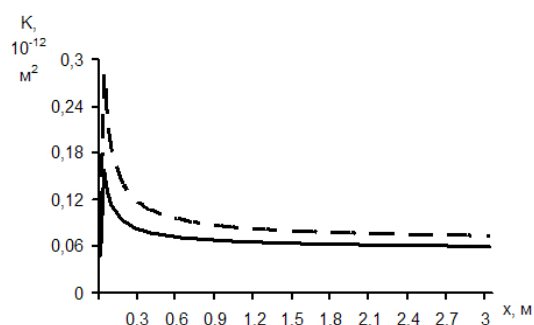
что наиболее существенное влияние периодичность закачки оказывает на процессы, происходящие в пористых блоках.



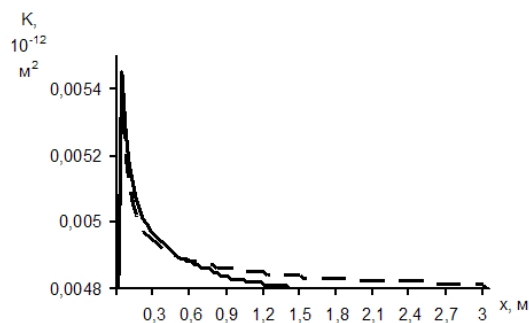
а)



б)



в)



г)

Рис. 11 Влияние режима нагнетания кислоты на: положение фронта течения кислоты в трещинах, а); в порах, б); распределение проницаемости в трещинах, в); в порах, г); сплошная линия - периодическая, пунктирная - непрерывная.

5 Заключение

Представлена двухфазная математическая модель кислотного воздействия на ПЗП нефтяных месторождений с карбонатными трещиновато-пористыми коллекторами, в основу, которой положена модель двойной пористости и двойной проницаемости. Вычислительный эксперимент показал, что предлагаемая модель позволяет проводить при заданных параметрах процесса расчет показателей кислотной обработки с исследованием влияния таких параметров, как скорость нагнетания кислоты, концентрация кислоты, скорость химической реакции. Модель позволяет оценить необходимое время остановки скважины на реакцию и глубину проникновения раствора кислоты в пласт.

Дальнейшее развитие модели связано с определением функциональной связи кинетических констант, получаемых в лабораторных опытах, и интенсивностью реакции в пористой среде, уточнением описания механизма фильтрации в пористых блоках и трещинах, с учетом неоднородности пласта.

Литература

- [1] *Loneragan L., Jolly R. J. H., Rawnsley K., Sanderson D. J.* Fractured Reservoirs. Geological Society. London: 2007.
- [2] *Weber K. J.* How Heterogeneity Affects Oil Recovery. in Reservoir Characterisation, Academic Press, 1986.
- [3] *Lassetter T. J., Waggoner J. R., Lake L. W.* 1986. Reservoir Heterogeneities and their Influence on Ultimate Recovery. Reservoir Characterization, Academic Press, 545 p.
- [4] *Saidi A. M.* Simulation of Naturally Fractured Reservoirs. San Francisco: CA. 1983.
- [5] *Pointe P. La., Hermanson J., Parney R., Eiben T.* Circle Ridge Fractured Reservoir Project. Golder Associates, Redmond, WA, 2000.
- [6] *Дзюба В. И., Пелевин М. Л.* Имитационное моделирование разработки Талинской площади Красноленинского месторождения. Вестник ЦКР Роснедра, С. 38–41. 2008.
- [7] *Economides M. J., Nolte K. G.* Reservoir Stimulation Chichester. England: 2000.
- [8] *Zhou Q., Liu H. H., Bodvarsson G. S., Oldenburg C. M.* Flow and transport in unsaturated fractured rock: effects of multiscale heterogeneity of hydrogeologic properties. Journal of Contaminant Hydrology, P. 1–30. 2003.
- [9] *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. Недра. Москва: 1984.
- [10] *Van Lingen P., Daniel J. M., Cosentino L., Sengul M.* Single Medium Simulation of Reservoirs with Conductive Faults and Fractures. SPE Middle East Oil Show, Bahrain: 2001.
- [11] *Bourbiaux B. J., Cacas M. C., Sarda S., Sabathier J. C.* A Fast and Efficient Methodology to Convert Fractured Reservoir Images Into a Dual-Porosity Model. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio. Texas. 1997.
- [12] *Дмитриев Н. М., Максимов В. М.* Модели фильтрации флюидов в анизотропных трещиновато-пористых средах. Т. С. 338–340. 2007.
- [13] *Zhou Q., Lee K. H., Goldstein N. E., Morrison H. F., Becker A.* Fracture detection using a grounded subsurface vertical electric dipole. Lawrence Berkley National Laboratory internal report LBL-21985.
- [14] ECLIPSE Technical Description. Geoquest, Schlumberger. 2010.
- [15] *Дмитриев Н. М., Максимов В. М.* Определяющие уравнения двух-фазной фильтрации в анизотропных пористых средах. Изв. РАН. С. 87–94. 1998.

- [16] *Bour O., Davy P.* Clustering and size distributions of fault patterns: theory and measurements. *Geophysical Research Letters*, 1999. P. 2001–2004.
- [17] *Заславский М. Ю., Томин П. Ю.* О моделировании процессов многофазной фильтрации в трещиноватых средах в применении к задачам адаптации модели месторождения. Препринт ИПМ им. Келдыша. Москва: 2010.
- [18] *Pickup G.E., Ringrose P.S., Jensen J.L., Sorbie K.S.* Permeability Tensors for Sedimentary Structures. *Mathematical Geology*, 1994.
- [19] *Мясников В. П., Заславский М. Ю., Пергамент А. Х.* Алгоритмы осреднения и метод опорных операторов в задачах пороупругости Доклады Академии наук, 2004. С. 301–306.
- [20] *Durlofsky L. J.* Numerical Calculation of Equivalent Grid Block Permeability Tensors for Heterogeneous Porous Media. *Water Res.*, 1991. P. 699–708.
- [21] *Заславский М. Ю., Пергамент А. Х.* Алгоритмы осреднения и метод опорных операторов в эллиптических задачах с разрывными коэффициентами. *ЖВМиМФ*, 2005. С. 1616–1627.
- [22] *Pergament A. Kh., Semiletov V. A., Zaslavsky M. Yu.* Proceedings of 10th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery Amsterdam, Netherlands: 2006.
- [23] *Грачев А. Ф., Мухамедиев Ш. А.* О трещиноватости каменноугольных известняков Московской синеклизы *Физика Земли*, С. 61–77. 2000.
- [24] *Грачев А. Ф., Мухамедиев Ш. А.* Рещиноватость горных пород и оценка напряжений в обнажениях, подверженных воздействию взрывов. С. 34–43. 2000.
- [25] *Желтов Ю. П.* Механика нефтегазонаосного пласта. М., Недра. 1975. 216 с.
- [26] *Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М.* Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.
- [27] *Бурнашев В. Ф., Хужаёров Б. Х.* Моделирование кислотной обработки доломитового коллектора призабойной зоны нефтяного пласта с учетом кольтматации породы. Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 2015.
- [28] *Бурнашев В. Ф., Хужаёров Б. Х.* Термокислотная обработка прискважинной зоны нефтяного пласта. *Инженерно-физический журнал*, 2015. С. 1–10.
- [29] *Халимов Э. М., Леви Б. И., Дзюба В. И., Пономарев С. А.* Технология по-вышения неф-теотдачи пластов М.: Недра, 1984. 271 с.
- [30] *Johnson K. H., Lewis R. W., Morgan K.* Numerical analysis of multiphase flow in porous media of negligible capillary pressure. *Transp. Prouss.*, New Delhi 1988. P. 509–902.
- [31] *Самарский А. А.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент Вест. АН СССР, 1979. С. 38–50.
- [32] *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в га-зовой динамике. М.: Недра, 1982. 392 с.
- [33] *Абуталиев Ф. Б., Бурнашев В. Ф.* Об одном подходе к численному моделированию нестационарной неизотермической многофазной многокомпонентной фильтрации с фазовыми переходами. Научно-издательский совет АН РУз., Ташкент: 1991. С. 120–127.
- [34] *Абуталиев Ф. Б., Бурнашев В. Ф.* Модифицированный метод «крупных частиц» для нестационарной неизотермической многофазной много-компонентной фильтрации с фазовыми переходами. Док. АН РУз, 1991. С. 22–25.
- [35] *Абуталиев Ф. Б., Бурнашев В. Ф.* Исследование устойчивости чис-ленных схем мето-да крупных частиц для нестационарной неизотермической многофазной фильтрации. Док. АН РУз, 1997. С. 19–25.

Поступила в редакцию 20.02.2020

UDC 532.546

MODELING OF ACID IMPACTS ON THE BOTTOM-HOLE ZONE OF OIL DEPOSITS WITH CARBONATE COLLECTORS TACKING INTO ACCOUNT THE FRACTURITY OF ROCKS

Burnashev V.F., Khuzhayorov B.Kh., Akhmedov O.

vladimir.burnash@mail.ru; b.khuzhayorov@mail.ru

Samarkand State University,

University blv. 15, Samarkand, 140104 Uzbekistan

The paper considers the problem of modeling the acid impact on the bottom-hole zone of oil fields with carbonate fractured-porous reservoirs. Modeling of the process is carried out within the framework of the mechanics of multicomponent multiphase filtration using averaged values of the filtration-capacitive parameters taking into account chemical kinetics. On the basis of the proposed model, acid advancement and the change in the filtration characteristics of the bottom-hole zone during the injection of the reagent are investigated. The effect of injection acid solution injection regimes on the processes occurring in the bottom-hole zone is evaluated. Numerical calculations are performed and the process characteristics are determined.

Keywords: absolute permeability, component, concentration, mathematical modeling, saturation, porous blocks, acid solution, cracks, phase, filtration.

Citation: Burnashev V.F., Khuzhayorov B.Kh., Akhmedov O. 2020. Modeling of acid impacts on the bottom-hole zone of oil deposits with carbonate collectors tacking into account the fracturity of rocks. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26): 39–57.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРАЦИЙ КОМПОЗИТНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ, ТРАНСПОРТИРУЮЩИХ ДВУХФАЗНЫЙ ПОТОК ЖИДКОСТИ

Худаяров Б.А., Комилова Х.М., Тураев Ф.Ж.

bakht-flpo@yandex.ru; komilova591@mail.ru; t.fozil86@mail.ru

Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

В статье представлены результаты исследований процессов колебания трубопроводов, транспортирующих двухфазный поток жидкости. При исследовании колебаний трубопроводов с протекающей внутри газосодержащей жидкостью используется вязкоупругая модель теории балок и модель Винклера основания. Для описания вязкоупругих свойств материала трубопровода и оснований грунта использована наследственная теория вязкоупругости Больцмана-Вольтерра. Численно исследованы влияние скорости потока газовой и жидкой фазы, влияние растягивающих усилий в продольном направлении трубопровода, параметры оснований Винклера, параметры сингулярности в ядрах наследственности и геометрических параметров трубопровода на колебания конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами. Выявлено, что увеличение длины зоны пузырька газа приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний трубопровода. Определены критические скорости потока для двухфазной жидкости. Выявлено, что увеличение плотности грунта оснований приводит к возрастанию критической скорости потока газа. Показано, что учет вязкоупругих свойств материала конструкции и оснований грунта приводит к уменьшению критической скорости потока.

Ключевые слова: математическая модель, трубопровод, двухфазная жидкость, критическая скорость двухфазного потока, колебательный процесс.

Цитирование: *Худаяров Б.А., Комилова Х.М., Тураев Ф.Ж.* Численное моделирование вибраций композитных трубопроводов, транспортирующих двухфазный поток жидкости // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 58–77.

1 Введение

В настоящее время трубопроводный транспорт имеет большое значение для экономического развития многих стран мира. Трубопроводы, транспортирующие жидкость, являются элементами конструкций многих инженерных сооружений. Трубопроводы используются в объектах нефтегазовой отрасли, предприятиях химической промышленности, на заводах по переработке газа, атомной энергетики, и так далее. Транспортировка трубопровода отличается от других видов транспортировки своей экономичностью, удобством и непрерывностью доставки в назначенный объект. Однако случайный разрыв трубопровода может нанести ущерб экологии и представлять опасность для человеческой жизни. Вибрации отдельных участков трубопроводов с протекающей жидкостью являются сложной проблемой для изучения. На сегодняшний день разработано множество динамических моделей для решения подобных задач. В основном эти модели описывают стадии процессов, происходящих

в трубопроводе с протекающей жидкостью и газом. К решению линейных и нелинейных задач о колебаниях и динамической устойчивости трубопроводов посвящено значительное число работ [1, 12].

В работе [13] разработана трехмерная нелинейная модель для исследования вихревых колебаний гибких труб, транспортирующих внутренний поток жидкости. Нелинейные уравнения движения с помощью метода Галеркина дискретизируются, в результате получается многомерная модель системы с уменьшенным порядком. На основе теории балок Тимошенко исследованы вибрационные характеристики труб, транспортирующих жидкость [14]. Для вывода нелинейного уравнения поперечных колебаний трубы, применяется обобщенный принцип Гамильтона. Численные примеры показывают, что вибрационные характеристики трубы очень чувствительны к длине, толщине, модулю сдвига и скорости. Относительная разница между двумя моделями труб зависит от скорости потока и может превышать 100

Трубопроводное транспортирование газосодержащей жидкости сопровождается вибрационными воздействиями на трубопровод, которые приводят в отдельных случаях к ускоренному разрушению труб. Скопления и неравномерное распределение газа по длине трубопровода приводят к пульсирующим колебаниям, а также к смещению центра тяжести потока вниз по сечению трубы, в результате трубопровод получает дополнительную динамическую нагрузку [15, 35].

В работе [15] предложена модель распространения волн давления для двухфазного газосодержащего жидкостного потока с учетом изменения фазы. Показано, что скорость распространения двухфазной волны давления сначала немного падает, а затем увеличивается с уменьшением доли пустот вдоль направления потока. В статье [16] исследуется двухфазный поток твердых и жидких смесей по трубопроводу на большие расстояния. Предложена математическая модель, которая описывает способ образования пробок в трубопроводах. В работе [7] разработана математическая модель двухфазного потока для жидкой и газовой фаз в системах трубопровод-стояк. Проводится сравнение численных и экспериментальных результатов, относящихся к стояку. Нелинейные динамические характеристики вертикального стояка с учетом вихревых колебаний и базовых возбуждений исследованы в [18]. Влияние внутренней скорости жидкости, скорости поперечного потока и базового ускорения на связанную частоту и амплитуды колебаний стояка изучено для линейных и нелинейных анализов. Результаты показывают, что, когда скорость поперечного потока становится в области синхронизации, вибрационные характеристики стояка изменяются от апериодических к периодическим движениям с явлением скачка между этими двумя видами движений. Моделирование неизотермической одномерной переходной гомогенной двухфазной газопроводной системы с использованием уравнений сохранения двух жидкостей исследованы в [19]. Для определения коэффициентов сжимаемости пара и жидкости использованы уравнение состояния Пенга- Робинсона. Анализ двухфазных потоков с помощью численного моделирования для длинных трубопроводов изучены в [20]. Разработана математическая модель двухфазных течений в длинных трубопроводах, которая включает два уравнения сохранения массы и двух импульсов, по одному для каждой фазы, а также одно уравнение сохранения энергии для смеси. Система уравнений дискретизируется в консервативной форме в рамках конечно-разностной системы и решается численным методом. В [21] проводится численное исследование линейной устойчивости математической модели двухфазного потока в системе трубопровод-стояк. В работе [22] предложена уточненная математическая модель для исследования течения двухфазной жидкости, основанная на

уравнениях движения Навье-Стокса и уравнениях состояния типа Ван-дер-Ваальса. В работе также предложена двумерная модель течений двухфазного односкоростного континуума. В работе [23] разработана динамическая модель консольной горизонтальной системы трубопроводов, транспортирующих газожидкостное двухфазное течение. Получены уравнения движения для консольной горизонтальной системы трубопроводов, транспортирующих двухфазный поток пробок. Показано, что собственная частота трубопровода более сильно зависит от параметров в зоне газового пузыря, а не от параметров в зоне жидкого потока. В работе [27] приведено экспериментальное исследование двухфазного потока плотного газа и вязкой нефти, протекающей по трубопроводу. Сравнены результаты измерений разных потоков течений. В работе [28] изучена вибрация в трубопроводах, вызванная двухфазным потоком. Проведены испытания в различных диапазонах двухфазного потока в прямолинейной горизонтальной трубе с фиксированным зажимом.

Обзор литературы, отражающей наиболее современный прогресс исследований в области вибрации, вызванной двухфазным потоком течений в трубопроводах, подробно приведен в статье [29]. В статье [30] аналитически и численно исследована динамика трубопроводов, транспортирующих двухфазные газосодержащие жидкости. Проведены параметрические исследования для анализа влияния объемной доли газа и объемного расхода на динамики труб, транспортирующих двухфазный поток воздух-вода. В работе [31] эксперименты проводились в горизонтальных трубах воздух-вода диаметром 32 и 50 мм. Результаты экспериментов сравниваются с теорией, представленной в работе, а также с ранее опубликованными гидродинамическими моделями.

Обзор исследований газожидкостных двухфазных структур потока и схемы потокакарты в адиабатических и диабатических условиях представлены в [32].

В настоящее время сельское хозяйство, нефтегазовая промышленность и жилищно-коммунальное хозяйство часто сталкиваются с проблемами ремонта, реконструкции и восстановления трубопроводов из-за воздействия на них различных внешних факторов. Одним из путей решения данной проблемы является применение современных, ресурсосберегающих, экологически безопасных технологий, к которым можно отнести использование неметаллических, в частности, полимерных композиционных материалов [37, 38]. Поэтому методы и проблемы теории наследственной упругости привлекают большое внимание исследователей. Имеется значительное число публикаций, посвященных решению задач расчета характеристик вязкоупругих трубопроводов [39, 52].

В ряде работ [40, 42, 44] уравнения движения трубы содержат слагаемые, учитывающие рассеяние энергии в материале трубы согласно гипотезе Кельвина-Фохта. Влияние функции частотной характеристики для вязкоупругих трубопроводов изучено в работе [40]. При рассмотрении упругих систем внутреннее трение материала учитывается с помощью обобщенной многоэлементной модели Кельвина-Фойгта. Исследованы вязкоупругие свойства материала трубопровода на резонансные частоты, а также частотно-зависимое демпфирование резонансных пиков. В статье [42] построена трехмерная нелинейная динамическая модель о колебаниях длинного морского стояка с учетом вязкоупругих свойств материала трубопровода, в условиях вихревой вибрации. Для описания процессов деформирования вязкоупругих материалов используются модель Кельвина-Фойгта. Результаты численного моделирования проверяются путем сравнения с опубликованными экспериментальными данными. Из полученных результатов видно, что параметры вязкоупругости материала

оказывают существенное влияние на естественную частоту исследуемого морского трубопровода-стояка.

В работе [43] разработана математическая модель колебаний вязкоупругих цилиндрических оболочек с учетом сейсмической и гидротермальной нагрузок. Процесс изменения деформации тела конструкций учитывается на основе модели Кельвина-Фойгта. В [44] исследуется влияние гидравлического удара в трубопроводах с учетом свойств вязкоупругости. Разработана математическая модель гидравлического удара в полимерных трубопроводах. Процесс изменения деформаций тела конструкций учитывается на основе обобщенной модели Кельвина-Фойгта. На основе теории балок Эйлера-Бернулли исследованы вибрационные характеристики трубы с учетом оснований [45]. Для описания процессов деформирования вязкоупругого основания используется модель Кельвина. Применяя принцип Гамильтона, получены уравнения движения трубы. Определены критические скорости потока. В работе [46] проводятся численные исследования колебаний наземных вязкоупругих трубопроводов. Изучена эффективность вязкоупругих свойств материала конструкций для смягчения сейсмических колебаний трубопровода. Численный анализ проводится с использованием программного пакета ANSYS. Полученные численные результаты показывают, что вязкоупругие свойства материала эффективно смягчают сейсмические колебания наземных трубопроводов. В работе [39] изучены динамические характеристики длинной трубы из вязкоупругих материалов PE100. Разработаны две математические модели, одна из которых состоит из четырех уравнений, а вторая упрощенная модель из двух уравнений. Показано, что вязкоупругое поведение PE100 играет первостепенную роль в демпфировании явления гидравлического удара. В статье [41] исследованы с учетом геометрической нелинейности динамические задачи о вибрации вязкоупругой трубы, транспортирующей жидкость. Уравнения плоского движения трубы получены с использованием теории Эйлера и обобщенного принципа Гамильтона. Численно исследованы влияние массового отношения, скорости жидкости и нелинейного коэффициента на нелинейные амплитуды и частоты вязкоупругой трубы. В работе [?] исследована устойчивость колебаний вязкоупругого трубопровода с протекающей жидкостью. Математические модели линейных и нелинейных задач о колебаниях трубопровода-полого стержня описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Полученные численные результаты сравниваются с аналитическими результатами. В работе [47] исследованы устойчивость многопролетных труб из вязкоупругого функционально-градиентного материала (ФГМ), транспортирующих жидкость. Изучены влияние скорости жидкости, внутреннего давления и внутреннего демпфирования на устойчивость вязкоупругих труб ФГМ, транспортирующих жидкость. В работе [48] предложен подход к определению функции ползучести в вязкоупругих длинных трубах. Аналитические решения, полученные предложенными методами, сравниваются с результатами в экспериментальных трубах. В работе [49] изучены поперечные вибрации трубы из композитных материалов. Определены критические скорости потока для различных граничных условий.

В работе [50] исследованы динамические задачи об устойчивости многослойных труб, транспортирующих неньютоновскую жидкость. Получены аналитические результаты для скорости внутренней жидкости и других переменных потоков. В работе [51] исследованы увеличение демпфирования стояков и уменьшение вибрационных эффектов с учетом вязкоупругих свойства материала конструкции. Разработана численная модель, позволяющая исследовать сэндвич-трубы. Достоверность

полученных результатов по данной модели оценены с помощью экспериментальных испытаний, выполненных в лаборатории конструкций в COPPE / UFRJ.

Из приведенного обзора можно сделать вывод, что разработка адекватных моделей задачи о колебаниях вязкоупругого трубопровода с протекающим двухфазным потоком жидкости, и учитывающих работу вязкоупругого основания грунта, представляет собой достаточно сложную и актуальную исследовательскую задачу, которая является основной целью данного исследования.

Настоящая работа посвящена решению вышеуказанных задач и поэтому ее тематика весьма актуальна.

2 Постановка задачи

Рассмотрим вязкоупругий трубопровод в виде прямой однопролетной шарнирно опертой с обоих концов балки, лежащей на вязкоупругом основании, описываемом моделью Винклера. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось x проходила через центры тяжести сечений трубы в опорах, которым соответствуют координаты $x = 0$ и $x = L$. Перемещения точек оси трубопровода по оси y представляют неизвестную функцию прогибов $w(x, t)$. Скорость течения жидкости вдоль оси трубопровода - U . Продольные колебания трубопровода не рассматриваются. Предполагается, что движение плоское, а труба номинально горизонтальна. Площадь поперечного сечения потока считается постоянной. Трубопровод, транспортирующий газожидкостный двухфазный поток, показан на рис. 1. В трубопроводе можно наблюдать несколько последовательных потоков пробки. На рис. 2 показаны зона газовой фазы, длина которой равна L_1 , и зона жидкой фазы, длина которой составляет L_2 . Длина трубопровода составляет $L (L = L_1 + L_2)$. Основываясь на работе [33, 36],

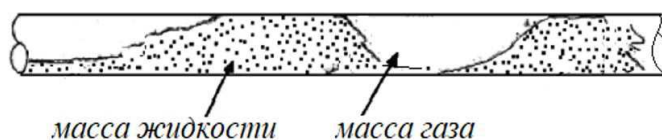


Рис. 1 Пробковый режим течения газосодержащей жидкости

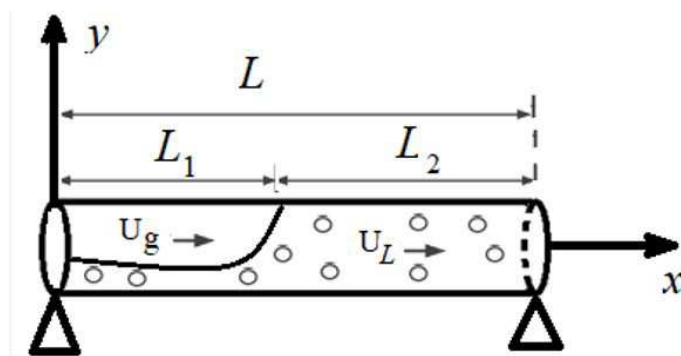


Рис. 2 Геометрии проточной части трубопровода

уравнение движения трубопроводов, транспортирующих двухфазный поток пробки,

с учетом свойств вязкости материала конструкций и оснований грунта имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & EI(1 - R^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(m_L U_L + m_g U_g) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \\
 & (m_L U_L^2 + m_g U_g^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (m_L + m_g + m_p) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\
 & k_1(1 - R_1^*) w - \left[N_0 + \frac{E(1 - R^*) A_0}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.
 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь E - модуль упругости материала; I - момент инерции сечения трубопровода; EI - изгибная жесткость трубы; w - прогиб трубопровода; L - длина трубы между опорами; x - независимая переменная, продольная осевая координата трубы; $w(x, t)$ - прогиб в сечении x в момент времени t ; m_L , m_g и m_p - масса жидкости, газа и трубы соответственно, отнесенная к единице длины трубопровода; A_0 - площадь поперечного сечения трубы; U_L , U_g - скорости потока жидкости и газа; k_1 - коэффициент постели вязкоупругого основания; N_0 - сжимающее (растягивающее)

усилие; R , R_1^* - интегральные операторы вида: $R^* \varphi(t) = \int_0^t R(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$; $R_1^* \varphi(t) = \int_0^t R_1(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$; $R(t - \tau) \in R_1(t - \tau)$ ядро релаксации Колтунова-Ржаницына [54]:

$$\begin{aligned}
 R(t - \tau) &= A \cdot \exp(-\beta(t - \tau)) \cdot (t - \tau)^{\alpha-1}, \\
 R_1(t - \tau) &= A_1 \cdot \exp(-\beta_1(t - \tau)) \cdot (t - \tau)^{\alpha_1-1}, \\
 A > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad A_1 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad 0 < \alpha_1 < 1;
 \end{aligned} \quad (2)$$

t - время наблюдения; τ - предшествующее моменту наблюдения время; A , A_1 - параметры вязкости; β , β_1 - параметры затухания; α , α_1 - параметр сингулярности, определяемый экспериментом.

Будем решать уравнение (1) при следующих граничных условиях

$$w(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = L; \quad (3)$$

и начальных условиях

$$w(x, 0) = \vartheta(x), \quad \dot{w}(x, 0) = \psi(x), \quad (4)$$

где $\vartheta(x)$, $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции в области изменения своих аргументов.

3 Метод решения

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N w_n(t) \varphi_n(x) \quad (5)$$

где $w_n(t)$ - некоторые функции, подлежащие к определению, а функции $\varphi_n(x)$ подобраны так, чтобы каждый член суммы (5) удовлетворял граничным условиям. В случае шарнирно опертой по краям трубы в разложении метода Бубнова-Галеркина (5), аппроксимирующие функции прогиба выбираем в виде

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6)$$

Подставим функцию (5) в уравнение (1) и применим к последнему процедуру Бубнова-Галеркина. В процессе интеграции уравнения 1 от 0 до L , расположенные параметры потока, включая массу на единицу длины и скорость потока для газовой и жидкой фазы в зоне газового пузыря и зоне жидкого потока, интегрируются отдельно в интервале от нуля до L_1 , и от L_1 до L (рис. 16). После несложных преобразований получим систему интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов (5).

Введя следующие безразмерные величины

$$\frac{x}{L}, \frac{w}{L}, \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_L + m_g + m_p}}$$

и сохраняя при этом прежние обозначения, получим систему интегро-дифференциальных уравнений относительно w_n :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \Delta_{kn} \ddot{w}_n + 2 \sum_{n=1}^N (\gamma_{Lkn} \beta_L u_L + \gamma_{gkn} \beta_g u_g) \dot{w}_n - \\ & \sum_{n=1}^N \alpha_{0n} (\delta_{Lkn} u_L^2 + \delta_{gkn} u_g^2) w_k + \alpha_{0n} \bar{N}_0 w_k + k_w (1 - R_1^*) w_k + \\ & \gamma_1 \alpha_{0k} \sum_{n,i=1}^N \varphi_{ni} w_k (1 - R^*) w_n w_i + \alpha_{0k}^2 (1 - R^*) w_k = 0. \\ & w_n(0) = w_{0nm}; \quad \dot{w}_n(0) = \dot{w}_{0nm}; \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\Delta_{kn} = \delta_{Lkn} + \delta_{gkn}$; $\delta_{Lkn} = \int_0^{\bar{L}_1} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx$; $\delta_{gkn} = \int_{\bar{L}_1}^1 \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx$; $\gamma_{Lkn} = \int_0^{\bar{L}_1} \varphi'_n(x) \varphi_k(x) dx$; $\gamma_{gkn} = \int_{\bar{L}_1}^1 \varphi'_n(x) \varphi_k(x) dx$ - безразмерные коэффициенты;

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{A_0 L^2}{I}; \quad \beta_L = \sqrt{\frac{m_L}{m_L + m_g + m_p}}; \quad \alpha_{0n} = n^2 \pi^2; \quad k_w = \frac{k_1 L^4}{EI}; \\ \beta_g &= \sqrt{\frac{m_g}{m_L + m_g + m_p}}; \quad u_L = L U_L \sqrt{\frac{m_L}{EI}}; \quad u_g = L U_g \sqrt{\frac{m_g}{EI}}; \\ \bar{L}_1 &= \frac{L_1}{L}; \quad \delta_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 0, \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases} \\ N_0 &= \frac{L^2 N_o}{EI}; \quad \varphi_{ni} = n i \pi^2 (\delta_{n+i} + \delta_{n-i}) / 4 \end{aligned}$$

-безразмерные параметры. Точки над переменными означают взятие производной по времени соответствующего порядка.

Далее к системе (7), описывающей задачу о колебаниях трубопровода, применен численный метод [55, 57]. На основе этого метода описан алгоритм численного решения системы (7). Интегрируя систему 7 два раза по t , записав ее в интегральной форме и с помощью рационального преобразования, исключим сингулярные особенности интегральных операторов R^* и R_1^* . Затем, полагая $t = t_i$, $t_i = i \cdot \Delta t$, $i = 1, 2, \dots$ ($\Delta t = \text{const}$) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для

вычисления $w_{ik} = w_k(t_i)$, , получим формулы для ядра Колтунова-Ржаницына ($R(t) = A \cdot \exp(-\beta t) \cdot t^{\alpha-1}, 0 < \alpha < 1$)

Таким образом, согласно численного метода относительно неизвестных получим систему алгебраических уравнений [52, 57, 61]. Для решения системы используется метод Гаусса. На базе разработанного алгоритма создан прикладных компьютерных программ. Результаты вычислений представлены в таблице и отражаются графиками, приведенными на рис. 17 - 22.

4 Обсуждение результатов

Результаты расчетов представлены в таблице. В таблице приведены критические скорости потока газа, определенные по формуле (7). При скоростях, когда $u > u_{cr}$, колебательное движение происходит с интенсивно нарастающими амплитудами и может привести конструкцию к разрушению, а в случае, когда $u < u_{cr}$, амплитуда колебаний затухает. Отметим, что при $u > u_{cr}$, разложение (7) расходится. Здесь u_{cr} -критическая скорость двухфазного потока.

Приведено исследование влияния вязкости. Расчеты показали, что учет вязкого сопротивления приводит к снижению критического значения скорости потока на 40 % по сравнению с упругим решением. При $A=0$ и $A=0.1$ критическая скорость газового потока соответственно равна 2.89 и 1.73. Исследования показали, что в частном случае результаты численного моделирования согласуются с результатами работ [62]. С увеличением сингулярного параметра критическая скорость газового потока увеличивается. Этот эффект более сильно заметен при значениях $\alpha=0.75$ в отличие от значения $\alpha=0.1$. Численные результаты показали, что влияние параметра затухания β в ядре наследственности на критическую скорость потока по сравнению с параметром вязкости A и сингулярности α оказалось незначительным. С увеличением этого значения скорость потока уменьшается, но незначительно. Полученное критическое значение скорости потока для вязкоупругой трубы при $\beta=0.07$, всего на 3,9 % ниже по сравнению с значениями скорости потока при $\beta=0.01$.

Увеличение параметра k_w приводит к существенному изменению критической скорости потока для газовой фазы. Исследования были проведены при $k_w = 0; 10; 30$ и 40. Видно, что с увеличением плотности грунта оснований приводит к возрастанию критической скорости потока газа.

Изучено влияние внешних растягивающих усилий в продольном направлении трубопровода. Из таблиц видно, что рост растягивающих усилий в продольном направлении трубопровода приводит к увеличению критической скорости потока для газовой фазы. При $N_o = 0.1$ и $N_o = 10.5$ критическая скорость потока для газовой фазы соответственно равна 1.76 и 3.67. Напротив, сжимающие усилия N_o приводят к такому же пропорциональному снижению критической скорости потока для газовой фазы.

Из таблиц видно, что увеличение значения параметра вязкости оснований A_1 приводит к снижению скорости потока. Теперь исследуем влияние параметра сингулярности оснований грунта на скорость потока. С увеличением параметра α_1 от 0.05 до 0.7 разница критических скоростей, определенных по формуле 7 увеличивается на 14.5 %. Например, при $\alpha_1 = 0.05$ скорость потока составляет 1.52, и при $\alpha_1 = 0.7$ скорость потока составляет 1.74.

Исследовано влияние параметра $\bar{L}_1$, характеризующего длину зоны пузырька газа на критические скорости потока для газовой фазы. Получено, что с увеличением параметра $\bar{L}_1$ происходит уменьшение критических скоростей потока для газовой фазы, что объясняется тем, что с ростом длины зоны газового потока скорость жид-

кости в зоне газового потока намного меньше, чем в зоне жидкого потока, особенно когда длина трубы большая.

Исследовалось влияние вязкоупругих свойств материала на поведение трубопровода. На рис. 17 изображен закон распределения прогиба трубопровода с учетом вязкоупругих свойств материала и показано его развитие во времени. Для упругих трубопроводов колебания носят практически периодический характер. Как видим, с учетом вязкоупругого свойства материала амплитуда колебаний резко снижается. Между тем влияние вязкоупругого свойства материала трубопровода на амплитуду колебаний трубопровода в начале процесса (участок кривой $w(t)$ в диапазоне $\leq t \leq 0.2$) проявляется в существенно меньшей степени. Начиная с $\tau \geq 0,2$ вязкоупругие свойства материала существенно влияют на колебательный процесс трубопровода. Анализ результатов показывает, что увеличение значения параметра вязкости A приводит к затуханию колебательного процесса. Эти выводы и результаты полностью соответствуют выводам и результатам работ [1, 57, 62, 63].

Изучено влияние скорости потока для жидкой фазы u_L на колебания трубы. На рис. 18 представлены графики функции прогиба для трубопровода с учетом вязкоупругих свойств материала ($\eta = 0.01$) и оснований грунта ($A_1 = 0.01$), при различных скоростях потока для жидкой фазы $u_L = 1.4$ (кривая 1); $u_L = 2.92$ (кривая 2). Для значений скорости потока для жидкой фазы $u_L = 1.4$ амплитуда колебаний затухает. При увеличении скорости потока для жидкой фазы до $u_L = 2.92$, колебания приобретают быстро возрастающие амплитуды. Скорость жидкой фазы превышает критическую скорость потока. Надо отметить, что колебания с возрастающими амплитудами могут привести к усталости конструкции.

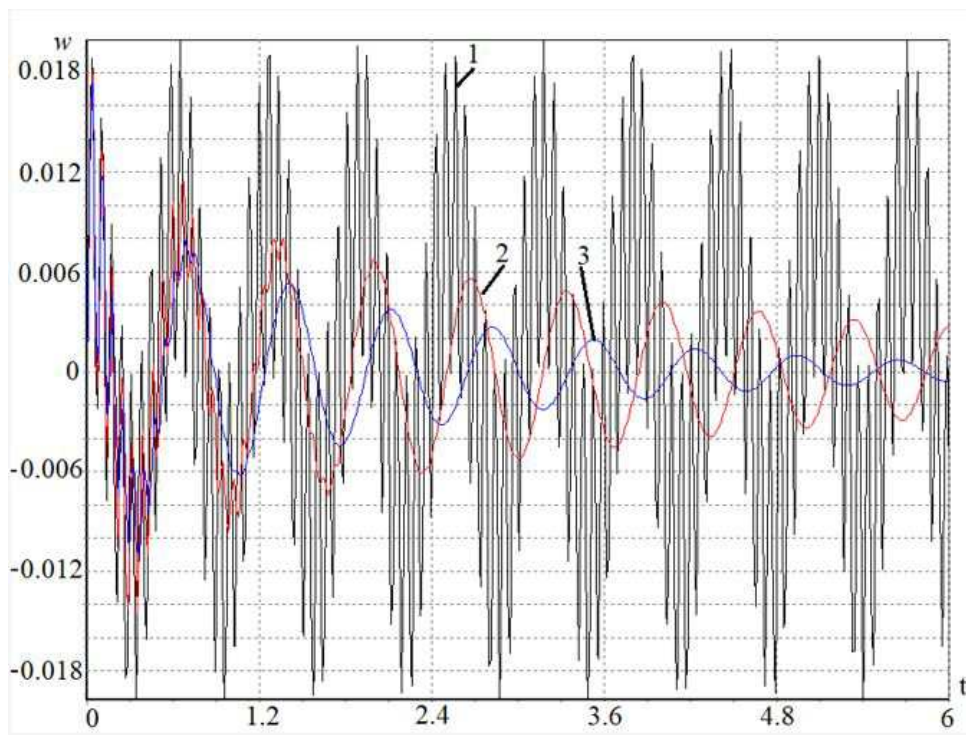
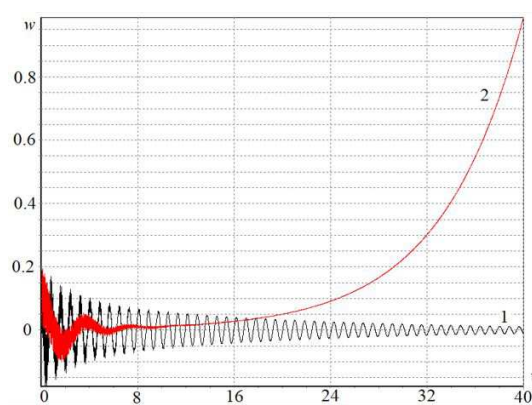


Рис. 3 Зависимость прогиба трубы w от времени t при различных параметрах вязкости: $A = 0$ (кривая 1); $A = 0.05$ (кривая 2); $A = 0.1$ (кривая 3); $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $k_w = 3.5$; $\bar{L}_1 = 0.3$; $\gamma_1 = 0.005$; $A_1 = 0.01$; $\alpha_1 = 0.25$; $\beta_1 = 0.05$; $N_o = 0.01$; $u_L = 0.3$; $u_g = 0.5$.

Таблица 1 Зависимость критической скорости потока двухфазной жидкости от физико-механических и геометрических параметров трубопроводов

A	α	β	γ	k_w	L_1	A_1	α_1	β_1	N_0	u_L	u_{gr}
0	0.25	0.05	0.005	3.5	0.3	0	0.25	0.05	0.01	1.5	2.89
0.001											2.874
0.01											2.79
0.1											1.73
0.01	0.1	0.05	0.005	3.5	0.3	0	0.25	0.05	0.01	1.5	2.682
	0.05										2.81
	0.75										2.82
0.1	0.15	0.05	0.005	3.5	0.3	0	0.25	0.05	0.01	1.5	1.45
	0.5										2.1
	0.75										2.3
0.01	0.25	0.01	0.005	3.5	0.3	0	0.25	0.05	0.01	1.5	1.78
		0.07									1.71
0.1	0.25	0.05	0.005	0	0.3	0	0.25	0.05	0.01	1.5	1.7
				10							1.95
				30							2.4
				40							2.6
0.1	0.25	0.05	0.005	3.5	0.1	0	0.25	0.05	0.01	1.5	1.7
				0.5							1.66
				0.7							1.59
0.1	0.25	0.05	0.005	3.5	0.3	0.001	0.25	0.05	0.01	1.5	1.72
						0.1					1.61
						0.2					1.56
0.1	0.25	0.05	0.005	3.5	0.3	0.1	0.05	0.05	0.01	1.5	1.52
							0.3				1.64
							0.7				1.74
0.1	0.25	0.05	0.005	3.5	0.3	0.1	0.25	0.05	0.1	1.5	1.76
									2.3		2.3
									5.5		2.9
									10.5		3.67

**Рис. 4** Зависимость $w(t)$ при различных скоростях потока для жидкой фазы $u_L = 1.4$ (кривая 1); $u_L = 2.92$ (кривая 2); $A = 0.01$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $k_w = 3.5$; $\bar{L}_1 = 0.3$; $\gamma_1 = 0.05$; $A_1 = 0.01$; $\alpha_1 = 0.25$; $\beta_1 = 0.05$; $N_o = 0.01$; $u_g = 1.5$.

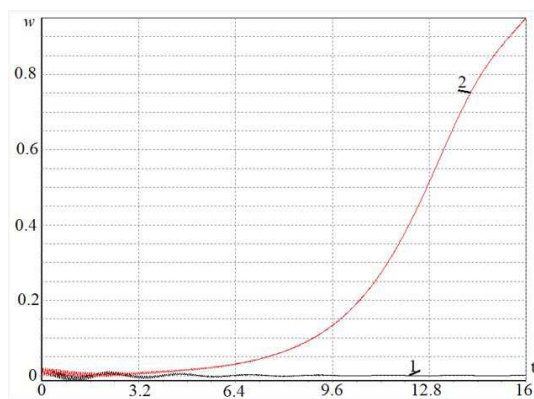


Рис. 5 Зависимость $w(t)$ при различных скоростях потока для газовой фазы $u_g = 2.7$ (кривая 1); $u_g = 2.81$ (кривая 2); $A=0.01$; $\alpha=0.25$; $\beta=0.05$; $k_w = 3.5$; $\bar{L}_1 = 0.3$; $\gamma_1 = 0.05$; $A_1 = 0.01$; $\alpha_1 = 0.25$; $\beta_1 = 0.05$; $N_o = 0.01$; $u_L = 1.5$.

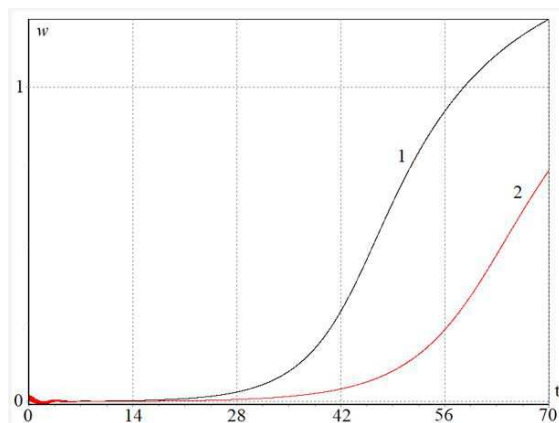


Рис. 6 Зависимость прогиба трубы w от времени t при $k_w=4.8$ (кривая 1); $k_w=5.1$ (кривая 2); $A=0.01$; $\alpha=0.25$; $\beta=0.05$; $\bar{L}_1 = 0.3$; $\gamma_1 = 0.05$; $A_1 = 0.01$; $\alpha_1 = 0.25$; $\beta_1 = 0.05$; $N_o = 0.01$; $u_L = 1.5$; $u_g = 2.81$.

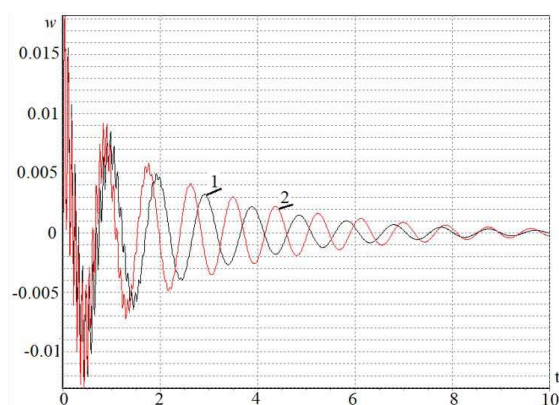


Рис. 7 Зависимость прогиба трубы w от времени t при $N_o = 0.08$; (кривая 1); $N_o = 1.05$; (кривая 2); $A=0.05$; $\beta=0.05$; $\alpha=0.25$; $k_w = 3.5$; $\bar{L}_1 = 0.3$; $\gamma_1 = 0.005$; $A_1 = 0.15$; $\alpha_1 = 0.15$; $\beta_1 = 0.05$; $N_o = 0.01$; $u_L = 1.5$; $u_g = 1.7$.

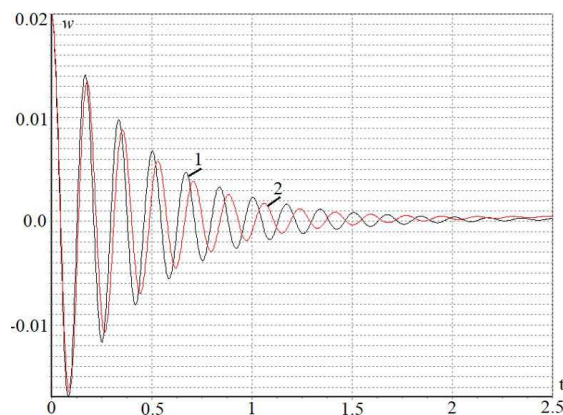


Рис. 8 Пример вычисления колебаний точки $x = L/2$ двумя приближениями в методе Галеркина. Результаты работ [1] (кривая 1); настоящий результат (кривая 2).

Аналогичные результаты получены для скорости потока для газовой фазы (рис. 19). Расчеты были проведены при $u_g=2.7$ (кривая 1); $u_g=2.81$ (кривая 2). При $u_g=2.81$ мы имеем колебательное движение с быстро возрастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению.

Приведены исследования влияния параметра оснований k_w на колебательный процесс (рис.20). Как видно из графика, для обоих значений оснований грунта $k_w=4.8$ (кривая 1) и $k_w=5.1$ (кривая 2) при скорости $u_L = 1.5$ и $u_g=2.81$ проявляется динамическая неустойчивость, движение представляет собой колебания со стремительно возрастающими амплитудами. При расчете использованы следующие значения параметров: $A=0.01$; $\alpha=0.25$; $\beta=0.05$; $\bar{L}_1 = 0.3$; $\gamma_1 = 0.05$; $A_1 = 0.01$; $\alpha_1 = 0.25$; $\beta_1 = 0.05$; $N_o = 0.01$.

На рис. 21 изображены кривые $w = w(0.5; t)$, построенные для различных значений растягивающих усилий. Кривые вычислены для трубопровода с параметрами $N_o = 0.08$; (кривая 1); $N_o = 1.05$; (кривая 2); $A=0.05$; $\beta=0.05$; $\alpha=0.25$; $k_w = 3.5$; $\bar{L}_1 = 0.3$; $\gamma_1 = 0.005$; $A_1 = 0.15$; $\alpha_1 = 0.15$; $\beta_1 = 0.05$; $N_o = 0.01$; $u_L = 1.5$; $u_g = 1.7$. Из рис.13 видно, что растягивающие усилия по направлению течения оказывают сильное стабилизирующее влияние, способствуя заметному росту скорости потока, пропорциональному величине растягивающих усилий.

На рис. 22 представлены результаты вычисления колебаний точки $x = L/2$ трубопровода, двумя приближениями в методе Галеркина. В частном случае колебания трубопроводов с протекающей однофазной жидкостью совпадают с результатами работ [1] (кривая 1). Этот факт подтверждает работоспособность и эффективность предложенных методов и компьютерных программ. В случае, двухфазного потока, амплитуда и частота колебания уменьшаются (кривая 2).

5 Заключение

Разработана математическая модель динамики прямого вязкоупругого трубопровода при протекании через него двухфазной жидкости. Разработан вычислительный алгоритм для решения задач динамики вязкоупругих трубопроводов с протекающей двухфазной жидкостью. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан пакет прикладных компьютерных программ, позволяющий исследовать колебательные процессы вязкоупругих трубопроводов с протекающей двухфазной

газосодержащей жидкостью. При моделировании нелинейных задач исследован ряд динамических эффектов:

- установлено, что вязкоупругие свойства материала трубопровода приводят к уменьшению критической скорости потока двухфазной газосодержащей жидкости;
- выявлено, что увеличение длины зоны пузырька газа приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний трубопровода;
- показано, что учет вязкоупругих свойств оснований грунта приводит к уменьшению критической скорости потока;
- выявлено, что с увеличением плотности грунта оснований приводит к возрастанию критической скорости потока газовой фазы.

Литература

- [1] *Velmisov A.P., Kssorneev V.A* Mathematical modeling in the problem of dynamic stability of a pipeline, Automation of control Processes // Journal of science, 2015. Vol. 39 P. 79–81.
- [2] *Païdoussis P.M* The canonical problem of the fluidconveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics // Journal of Sound and Vibration, 2008. Vol. 310 P. 462–492.
- [3] *Paidoussis P.M., Issid T.N* Dynamic stability of pipes conveying fluid // Journal of Sound and Vibration, 1974. Vol. 33. P. 267–294.
- [4] *Tkachenko O.* Construction of the mathematical model of complex pipeline with variable geometry. 15th International scientific conference “Underground urbanization as a Prerequisite for Sustainable Development” // Procedia Engineering, 2016. Vol. 165. P. 1261–1274.
- [5] *Verichev N.S., Metrikine A.V.* Instability of a moving bogie on a flexibly supported Timoshenko beam // Journal of Sound and Vibration, 2002. Vol. 253. P. 653–668.
- [6] *Kutin J., Bajsić I.* Fluid-dynamic loading of pipes conveying fluid with a laminar mean-flow velocity profile // Journal of Fluids and Structures, 2014. Vol. 50. P. 151–183.
- [7] *Hellum M.A., Mukherjee R., Hull J.A.* Dynamics of pipes conveying fluid with non-uniform turbulent and laminar velocity profiles // Journal of Fluids and Structures, 2010. Vol. 26. P. 804–813.
- [8] *Yin, L., Qian Q., Wang L.* Strain gradient beam model for dynamics of microscale pipes conveying fluid // Applied Mathematical Modelling, 2011. Vol. 35. P. 2864–2874.
- [9] *Kuiper, G.L., Metrikine V.A.* Dynamic stability of a submerged, free-hanging riser conveying fluid // Journal of Sound and Vibration, 2008. Vol. 280. P. 1051–1065.
- [10] *Kuiper, G.L., Metrikine V.A.* Metrikine, Experimental investigation of dynamic stability of a cantilever pipe aspirating fluid // Journal of Fluids and Structures, 2008. Vol. 24. P. 541–558.
- [11] *Paidoussis M., Moon F.* Nonlinear and chaotic fluidelastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid // Fluids Struct, 1988. P. 567–591.
- [12] *Rinaldi A., Paidoussis M.* Dynamics of a cantilevered pipe discharging fluid, fitted with a stabilizing end-piece // Fluids Struct, 2010. Vol. 26. P. 517–525.
- [13] *Wang, L., Jiang L.T., Dai H.L., Ni Q.* Three-dimensional vortex-induced vibrations of supported pipes conveying fluid based on wake oscillator models // Journal of Sound and Vibration, 2018. Vol. 422. P. 590–612.
- [14] *Tan X., Xiao Y.M., Ding H., Chen L.Q.* Vibration around non-trivial equilibrium of a supercritical Timoshenko pipe conveying fluid // Journal of Sound and Vibration, 2018. Vol. 428. P. 104–118.

- [15] *Yanzhong L., Cuiv L.* Erfeng Chen, Yuanyuan Ying, Pressure wave propagation characteristics in a two-phase flow pipeline for liquid-propellant rocket // *Aerospace Science and Technology*, 2011. Vol. 15. P. 453–464.
- [16] *Samson R., Joseph A.* Longitudinal instability of slurry pipeline flow, *International Journal of Multiphase Flow*, 2017. Vol. 90. P. 57–63.
- [17] *Baliño J.L., Burr P.K., Nemoto H.R.* Modeling and simulation of severe slugging in air–water pipeline–riser systems // *International Journal of Multiphase Flow*, 2010. Vol. 36. P. 643–660.
- [18] *Dai L.H., Abdelkefi A., Wang L.* Modeling and nonlinear dynamics of fluid-conveying risers under hybrid excitations // *International Journal of Engineering Science*, 2014. Vol. 81. P. 1–14.
- [19] *Mohammad A., Kirby A.CH, Larry A.G.* Transient modeling of non-isothermal, dispersed two-phase flow in natural gas pipelines // *Applied Mathematical Modelling*, 2010. Vol. 34. P. 495–507.
- [20] *Sondermann K.N., Baptista M.R* Felipe Bastos de Freitas Rachid, Gustavo Cesar Rachid Bodstein, Numerical simulation of non-isothermal two-phase flow in pipelines using a two-fluid model // *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2019. Vol. 173. P. 298–314.
- [21] *Azevedo R.G., Baliño L.J., Burr P.K.* Influence of pipeline modeling in stability analysis for severe slugging // *Chemical Engineering Science*, 2017. Vol. 161. P. 1–13.
- [22] *Зайцев А.Н., Критский Б.В., Рыков Ю.Г.* Ободной двумерной моделира счета двух фазных потоков // *Препринты ИП Мим.М.В. Кельдыша*, 2014. Vol. 86. P. 32.
- [23] *Liu G., Wang Y., Ding H., Chen L.* Wang, Study on the natural frequencies of pipes conveying gas–liquid two-phase slug flow, *Int J. Mech. Sci*, 2018. Vol. 141. P. 168–188.
- [24] *Willam P., Ban S., Mohammad S.N.* Simulation of two phase oil-gas flow in pipeline *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2016. Vol. 11. P. 4208–4213.
- [25] *Dad B.* A mathematical model for two-phase stratified turbulent duct flow // *Multiphase Science and Technology*, 2007. Vol. 19. P. 1–48.
- [26] *Liljemark S., Arvidsson K., Michael T.P., Cann M.* Hubertus Tummescheit, Stephane Velut, Dynamic Simulation of a carbon dioxide transfer pipeline for analysis of normal operation and failure modes // *Energy Procedia*, 2011. Vol. 4. P. 3040–3047.
- [27] *Khaledi A.H., Smith E.I., Unander E.T., Nossen J.* Investigation of two-phase flow pattern, liquid holdup and pressure drop in viscous oil–gas flow // *Int. J. Multiphase Flow*, 2014. Vol. 67. P. 37–51.
- [28] *Ortiz-Vidal E.L., Mureithi W.N., Rodriguez M.H.* Vibration response of a pipe subjected to two-phase flow: analytical formulations and experiments // *Nucl. Eng. Des*, 2017. Vol. 313. P. 214–224.
- [29] *Miwa S., Mori M., Ding H., Chen L.* Vibration around non-trivial equilibrium of a supercritical Timoshenko pipe conveying fluid // *Journal of Sound and Vibration*, 2015. Vol. 78. P. 270–284.
- [30] *An C., Su J.* Dynamic behavior of pipes conveying gas–liquid two-phase flow // *Nucl. Eng. Des*, 2015. Vol. 291. P. 204–212.
- [31] *Cook M., Behnia M.* Film profiles behind liquid slugs in gas–liquid pipe flow // *AIChE J*, 1997. Vol. 43. P. 2180–2186.
- [32] *Cheng L., Ribatski G., Thome R.J.* Two-phase flow patterns and flow-pattern maps: fundamentals and applications // *Appl. Mech. Rev*, 2008. Vol. 61. P. 1239–1249.
- [33] *Dai H., Wang L., Ni Q.* Dynamics of a fluid-conveying pipe composed of two different materials // *J. Eng. Sci.*, 2013. Vol. 73. P. 67–76.

- [34] *Giraudeau M., Mureithi N., Pettigrew M.* Two-phase flow-induced forces on piping in vertical upward flow: excitation mechanisms and correlation models // J. Press. Vessel Technol, 2013. Vol. 135.
- [35] *NobakhtHassanlouei R., Firouzfar H., Kasiri N., Khanof M.* A simple mathematical model for slug liquid holdup in horizontal pipes // Scientia Iranica, 2012. Vol. 19. P. 1653–1660.
- [36] *Monette C., Pettigrew M.J* Fluidelastic instability of flexible tubes subjected to two-phase internal flow // J. Fluids Struct, 2004. Vol. 19. P. 943–956.
- [37] *Anoshkin N.A., Zuyko Yu.V., Ivanov G.S.* Calculation of Stress-strain State and Prediction of the Strength of Polymer Reinforced Gas Pipes, Bulletin of the Samara State University // Natural science series, 2007. Vol. 6. P. 419–426.
- [38] *Yagubov Z.E., Tskhadaya D.N., Yagubov KH.Z.* Multichannel Pipelines for Oil and Gas Transportation and Recovery of Worn out Oil and Gas Pipelines // Scientific papers, 2013. Vol. 1. P. 57–63.
- [39] *Mohamed et al.* Investigation of viscoelastic effects on transient flow in a relatively long PE100 pipe // Journal of Fluids and Structures, 2018. Vol. 80. P. 370–389.
- [40] *Jinzhe G., et al.* Study on the Frequency Response Function of Viscoelastic Pipelines Using a Multi-Element Kelvin-Voigt Model // Procedia Engineering, 2015. Vol. 119. P. 226–234.
- [41] *Tan Y., Yaxin Z.* Nonlinear vibration analysis of a fractional dynamic model for the viscoelastic pipe conveying fluid // Applied Mathematical Modelling, 2018. Vol. 56. P. 123–136.
- [42] *Wenwu Y., et al* Nonlinear three-dimensional dynamics of a marine viscoelastic riser subjected to uniform flow // Ocean Engineering, 2018. Vol. 149. P. 38–52.
- [43] *Hosseini H., Kolahchi R., Ding H., Chen L.* Seismic response of functionally graded-carbon nanotubes-reinforced submerged viscoelastic cylindrical shell in hygrothermal environment // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2018. Vol. 102. P. 101–109.
- [44] *Urbanowicz K., Firkowski M., Zarzycki Z.* Modeling water hammer in viscoelastic pipelines: short brief // Journal of Physics: Conference Series, 2016. Vol. 760.
- [45] *Hao Y.T., Mao X., Ding H., Chen L.* Establishment of Mathematical Model of Buried Pipeline on Nonlinear Soil Dynamic Model // Advanced Materials Research, 2012. Vol. 452–453. P. 334–338.
- [46] *Kaiming B., Hong H.* Numerical simulation on the effectiveness of using viscoelastic materials to mitigate seismic induced vibrations of above-ground pipelines // Engineering Structures, 2016. Vol. 123. P. 1–14.
- [47] *Jiaquan D. et al.* Stability analysis of multi-span viscoelastic functionally graded material pipes conveying fluid using a hybrid method // European Journal of Mechanics - A/Solids, 2017. Vol. 65. P. 257–270.
- [48] *Alireza K., Haghighi A.* Straight forward transient-based approach for the creep function determination in viscoelastic pipes // Journal of Hydraulic Engineering, 2014. Vol. 140.
- [49] *Nawal H., Raheimy A.* Free Vibrations of Uniform Pipes Made From Composite Materials at an Internal Flow Under Effect of Additional Boundary Conditions, Journal of Babylon University // Engineering Sciences, 2016. Vol. 24. P. 764–772.
- [50] *Vincent O., et al.* Vibration and Stability Behavior of Sandwiched Viscoelastic Pipes Conveying a Non-Newtonian Fluid, ASME 2010 29th International Conference on Ocean // Offshore and Arctic Engineering, 2010. Vol. 5. P. 99–111. doi: <http://dx.doi.org/10.1115/OMAE2010-20065>.
- [51] *Borges F., et al.* Vibration Reduction in Steel Catenary Risers by the Use of Viscoelastic Materials, ASME 2011 30th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic

- Engineering, Volume 4 // Pipeline and Riser Technology, Rotterdam, The Netherlands, June 19–24. 2011. P. 829–838. doi: <http://dx.doi.org/OMAE2011-50052>.
- [52] *Khudayarov B.A., Turaev, ZH.F.* Mathematical Simulation of Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Pipelines Conveying Fluid // Applied Mathematical Modelling, 2019. Vol. 66. P. 662–679. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2018.10.008>.
- [53] *Gang L., Yueshe W.* Natural frequency analysis of a cantilevered piping system conveying gas–liquid two-phase slug flow // Chemical Engineering Research and Design, 2018. Vol. 136. P. 564–580.
- [54] *Koltunov M.A.* Creep and Relaxation. Moscow // Higher School, 1970.
- [55] *Badalov F.B.* Methods for Solving Integral and Integro-differential Equations of the Hereditary Theory of Viscoelasticity / Tashkent: . — M.: Mekhnat. 1987.
- [56] *Badalov F.B., Eshmatov KH., Yusupov M.* Some Methods of Solution of Systems of Integro-differential Equations Encountered in Problems of Viscoelasticity // Applied Mathematics and Mechanics, 1987. Vol. 51. P. 867–871.
- [57] *Badalov F.B., Khudayarov B.A., Abdurkarimov A.* Effect of the hereditary kernel on the solution of linear and nonlinear dynamic problems of hereditary deformable systems // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2007. Vol. 36. P. 328–335.
- [58] *Khudayarov A.B., Bandurin N.G.* Nonlinear Oscillation of Viscoelastic Orthotropic Cylindrical Panels. Mathematical // Models and Computer Simulations, 2007. Vol. 17. P. 79–86.
- [59] *Khudayarov A.B., Bandurin N.G.* Nonlinear Oscillation of Viscoelastic Orthotropic Cylindrical Panels // Mathematical Models and Computer Simulations, 2005. Vol. 17. P. 79–86.
- [60] *Khudayarov A.B., Bandurin N.G.* Numerical Investigation of Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Plates and Cylindrical Panels in a Gas Flow // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2007. Vol. 48. P. 279–284..
- [61] *Khudayarov A.B.* Numerical Analysis of the Nonlinear Oscillation of Viscoelastic Plate // International Applied Mechanics, 2010. Vol. 41. P. 538–542.
- [62] *Khudayarov A.B.* Flutter of a viscoelastic plate in a supersonic gas flow // International Applied Mechanics, 2010. Vol. 46. P. 455–460.
- [63] *Matyash I.V.* On the Dynamic Strength of a Hinged Supported Elastic-Viscous Rod // Mechanics of Polymers, 1971. Vol. 2. P. 293–300.
- [64] *Mirsaidov M.M., Sultanov Z.T.* Use of the linear hereditary theory of viscoelasticity in dynamic calculation of earth structures // Foundations, bases and soil mechanics, 2012. Vol. 6. P. 30–34.

Поступила в редакцию 20.06.2019

UDC 539.3

NUMERICAL MODELING OF VIBRATIONS COMPOSITE PIPELINES TRANSPORTING TWO-PHASE FLUID FLOW

Khudayarov B.A., Komilova Kh.M., Turaev F.Zh.

bakht-flpo@yandex.ru; komilova591@mail.ru; t.fozil86@mail.ru

Tashkent institute of irrigation and agricultural mechanization engineers

Results of studies of the oscillations of pipelines conveying a two-phase slug flow are presented in the paper. A viscoelastic model of the theory of beams and the Winkler base model are used in the study of pipeline oscillations with a gas-containing slug flowing inside. The Boltzmann-Volterra hereditary theory of the viscoelasticity is used to describe the viscoelastic properties of the pipeline material and earth bases. The effect of gas and liquid phases flow rates, influence of tensile forces in the longitudinal direction of the pipeline, parameters of Winkler bases, parameters of singularity in the heredity kernels and geometric parameters of the pipeline on the oscillations of structures with viscoelastic properties are numerically studied. It is revealed that an increase in the length of the gas bubble zone leads to a decrease in the amplitude and oscillation frequency of the pipeline. The critical rates for a two-phase slug flow are determined. It is revealed that an increase in the soil density of the bases leads to an increase in the critical rate of gas flow. It is shown that an account of viscoelastic properties of structure material and earth bases leads to a decrease in the critical flow rate.

Keywords: mathematical model, viscoelasticity, pipeline, two-phase slug flow, critical rate of a two-phase slug flow, oscillatory process.

Citation: Khudayarov B.A., Komilova Kh.M., Turaev F.Zh. 2020. Numerical modeling of vibrations composite pipelines transporting two-phase fluid flow. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26): 58–77.

References

- [1] Velmisov A.P., Korneev V.A. 2015. Mathematical modeling in the problem of dynamic stability of a pipeline, Automation of control Processes *Journal of science* 39:79–81.
- [2] Paidoussis P.M. 2008. The canonical problem of the fluid conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics *Journal of Sound and Vibration* 310:462–492.
- [3] Paidoussis P.M., Issid T.N. 1974. Dynamic stability of pipes conveying fluid *Journal of Sound and Vibration* 33:267–294.
- [4] Tkachenko O. 2016. Construction of the mathematical model of complex pipeline with variable geometry. 15th International scientific conference “Underground urbanization as a Prerequisite for Sustainable Development” *Journal of Sound and Vibration* 165:1261–1274.
- [5] Verichev N.S., Metrikine A.V. 2002. Instability of a moving bogie on a flexibly supported Timoshenko beam *Journal of Sound and Vibration* 253:653–668.
- [6] Kutin J., Bajsić I. 2014. Fluid-dynamic loading of pipes conveying fluid with a laminar mean-flow velocity profile *Journal of Fluids and Structures* 50:151–183.
- [7] Hellum M.A., Mukherjee R., Hull J.A. 2010. Dynamics of pipes conveying fluid with non-uniform turbulent and laminar velocity profiles *Journal of Fluids and Structures* 26:804–813.
- [8] Yin, L., Qian Q., Wang L. 2011. Strain gradient beam model for dynamics of microscale pipes conveying fluid *Applied Mathematical Modelling* 35:2864–2874.
- [9] Kuiper, G.L., Metrikine V.A. 2008. Dynamic stability of a submerged, free-hanging riser conveying fluid *Journal of Sound and Vibration* 280:1051–1065.
- [10] Kuiper, G.L., Metrikine V.A. 2008. Metrikine, Experimental investigation of dynamic stability of a cantilever pipe aspirating fluid *Journal of Fluids and Structures* 24:541–558.
- [11] Paidoussis M., Moon F. 1988. Nonlinear and chaotic fluidelastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid *Fluids Struct* 567–591.
- [12] Rinaldi A., Paidoussis M. 2010. Dynamics of a cantilevered pipe discharging fluid, fitted with a stabilizing end-piece *Fluids Struct* 26:517–525.

- [13] Wang, L., Jiang L.T., Dai H.L., Ni Q. 2018. Three-dimensional vortex-induced vibrations of supported pipes conveying fluid based on wake oscillator models *Journal of Sound and Vibration* 422:590–612.
- [14] Tan X., Xiao Y.M., Ding H., Chen L.Q. 2018. Vibration around non-trivial equilibrium of a supercritical Timoshenko pipe conveying fluid *Journal of Sound and Vibration* 428:104–118.
- [15] Yanzhong L., Cuiv L. 2011. Erfeng Chen, Yuanyuan Ying, Pressure wave propagation characteristics in a two-phase flow pipeline for liquid-propellant rocket *Aerospace Science and Technology* 15:453–464.
- [16] Samson R., Joseph A. 2017. Longitudinal instability of slurry pipeline flow, *International Journal of Multiphase Flow* 90:57–63.
- [17] Baliño J.L., Burr P.K., Nemoto H.R. 2010. Modeling and simulation of severe slugging in air–water pipeline–riser systems *International Journal of Multiphase Flow* 36:643–660.
- [18] Dai L.H., Abdelkefi A., Wang L.. 2014. Modeling and nonlinear dynamics of fluid-conveying risers under hybrid excitations *International Journal of Engineering Science* 81:1–14.
- [19] Mohammad A., Kirby A.CH, Larry A.G. 2010. Transient modeling of non-isothermal, dispersed two-phase flow in natural gas pipelines *Applied Mathematical Modelling* 34:495–507.
- [20] Sondermann K.N., Baptista M.R. 2019. Felipe Bastos de Freitas Rachid, Gustavo Cesar Rachid Bodstein, Numerical simulation of non-isothermal two-phase flow in pipelines using a two-fluid model *Journal of Petroleum Science and Engineering* 173:298–314.
- [21] Azevedo R.G., Baliño L.J., Burr P.K. 2017. Influence of pipeline modeling in stability analysis for severe slugging *Chemical Engineering Science* 161:1–13.
- [22] Zaitsev A. N., Cretan B. V., Rykov Yu. G. 2014. Obodnoy dvumernoy modelira scheta dvux faznix potokov [Rim two-dimensional Modeler accounts for two-phase flows]. *Preprinti IP Mim.M.V. Keldisha* 86:32.
- [23] Liu G., Wang Y., Ding H., Chen L. 2018. Wang, Study on the natural frequencies of pipes conveying gas–liquid two-phase slug flow *J. Mech. Sci* 141:168–188.
- [24] Willam P., Ban S., Mohammad S.N. 2016. Simulation of two phase oil-gas flow in pipeline *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences* 11:4208–4213.
- [25] Dad B. 2007. A mathematical model for two-phase stratified turbulent duct flow *Multiphase Science and Technology* 19:1–48.
- [26] Liljemark S., Arvidsson K., Michael T.P., Cann M. 2011. Hubertus Tummescheit, Stephane Velut, Dynamic Simulation of a carbon dioxide transfer pipeline for analysis of normal operation and failure modes *Energy Procedia* 2011. 4:3040–3047.
- [27] Khaleedi A.H., Smith E.I., Unander E.T., Nossen J. 2014. Investigation of two-phase flow pattern, liquid holdup and pressure drop in viscous oil–gas flow *Multiphase Flow* 67:37–51.
- [28] Ortiz-Vidal E.L., Mureithi W.N., Rodriguez M.H. 2017. Vibration response of a pipe subjected to two-phase flow: analytical formulations and experiments *Nucl. Eng. Des* 313:214–224.
- [29] Miwa S., Mori M., Ding H., Chen L. 2015. Vibration around non-trivial equilibrium of a supercritical Timoshenko pipe conveying fluid *Journal of Sound and Vibration* 78:270–284.
- [30] An C., Su J. 2015. Dynamic behavior of pipes conveying gas–liquid two-phase flow *Nucl. Eng. Des* 291:204–212.
- [31] Cook M., Behnia M. 1997. Film profiles behind liquid slugs in gas–liquid pipe flow *AIChE* 43:2180–2186.
- [32] Cheng L., Ribatski G., Thome R.J. 2008. Two-phase flow patterns and flow-pattern maps: fundamentals and applications *Appl. Mech. Rev* 61:1239–1249.

- [33] Dai H., Wang L., Ni Q. 2013. Dynamics of a fluid-conveying pipe composed of two different materials *J. Eng. Sci.* 73:67–76.
- [34] Giraudeau M., Mureithi N., Pettigrew M. 2013. Two-phase flow-induced forces on piping in vertical upward flow: excitation mechanisms and correlation models *J. Press. Vessel Technol* 135.
- [35] Nobakht Hassanlouei R., Firouzfard H., Kasiri N., Khanof M. 2012. A simple mathematical model for slug liquid holdup in horizontal pipes *Scientia Iranica* 19:1653–1660.
- [36] Monette C., Pettigrew M.J. 2004. Fluidelastic instability of flexible tubes subjected to two-phase internal flow *J. Fluids Struct* 19:943–956.
- [37] Anoshkin N.A., Zuyko Yu.V., Ivanov G.S. 2007. Calculation of Stress-strain State and Prediction of the Strength of Polymer Reinforced Gas Pipes, Bulletin of the Samara State University *Natural science series* 6:419–426.
- [38] Yagubov Z.E., Tskhadaya D.N., Yagubov K.H.Z. 2013. Multichannel Pipelines for Oil and Gas Transportation and Recovery of Worn out Oil and Gas Pipelines.
- [39] Mohamed et al. 2018. Investigation of viscoelastic effects on transient flow in a relatively long PE100 pipe *Journal of Fluids and Structures* 80:370–389.
- [40] Jinzhe G., et al. 2015. Study on the Frequency Response Function of Viscoelastic Pipelines Using a Multi-Element Kelvin-Voigt Model *Procedia Engineering* 119:226–234.
- [41] Tan Y., Yaxin Z. 2018. Nonlinear vibration analysis of a fractional dynamic model for the viscoelastic pipe conveying fluid *Applied Mathematical Modelling* 56:123–136.
- [42] Wenwu Y., et al. 2018. Nonlinear three-dimensional dynamics of a marine viscoelastic riser subjected to uniform flow *Ocean Engineering* 149:38–52.
- [43] Hosseini H., Kolehchi R., Ding H., Chen L. 2018. Seismic response of functionally graded-carbon nanotubes-reinforced submerged viscoelastic cylindrical shell in hygrothermal environment *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 102:101–109.
- [44] Urbanowicz K., Firkowski M., Zarzycki Z. 2016. Modeling water hammer in viscoelastic pipelines: short brief *Journal of Physics: Conference Series* 760.
- [45] Hao Y.T., Mao X., Ding H., Chen L. 2012. Establishment of Mathematical Model of Buried Pipeline on Nonlinear Soil Dynamic Model *Advanced Materials Research* 452:334–338.
- [46] Kaiming B., Hong H. 2016. Numerical simulation on the effectiveness of using viscoelastic materials to mitigate seismic induced vibrations of above-ground pipelines *Engineering Structures* 123:1–14.
- [47] Jiaquan D. et al. 2017. Stability analysis of multi-span viscoelastic functionally graded material pipes conveying fluid using a hybrid method *European Journal of Mechanics - A/Solids* 65:257–270.
- [48] Alireza K., Haghighi A. 2014. Straight forward transient-based approach for the creep function determination in viscoelastic pipes *Journal of Hydraulic Engineering* 140.
- [49] Nawal H., Raheimy A. 2016. Free Vibrations of Uniform Pipes Made From Composite Materials at an Internal Flow Under Effect of Additional Boundary Conditions, Journal of Babylon University *Engineering Sciences* 24:764–772.
- [50] Vincent O., et al. 2010. Vibration and Stability Behavior of Sandwiched Viscoelastic Pipes Conveying a Non-Newtonian Fluid, ASME 2010 29th International Conference on Ocean Offshore and Arctic Engineering 5:99–111. doi: <http://dx.doi.org/10.1115/OMAE2010-20065>.
- [51] Borges F., et al. June 19–24. 2011 Vibration Reduction in Steel Catenary Risers by the Use of Viscoelastic Materials, ASME 2011 30th International Conference on Ocean, Offshore and

- Arctic Engineering, Volume 4 *Pipeline and Riser Technology*, Rotterdam, The Netherlands P. 829–838. doi: <http://dx.doi.org/OMAE2011-50052>.
- [52] Khudayarov B.A., Turaev, ZH.F. 2019. Mathematical Simulation of Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Pipelines Conveying Fluid *Applied Mathematical Modelling* 66:662–679. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2018.10.008>.
- [53] Gang L., Yueshe W. 2018. Natural frequency analysis of a cantilevered piping system conveying gas–liquid two-phase slug flow *Chemical Engineering Research and Design* 136:564–580.
- [54] Koltunov M.A. 1970. Creep and Relaxation *Moscow Higher School*.
- [55] Badalov F.B. 1987. *Methods for Solving Integral and Integro-differential Equations of the Hereditary Theory of Viscoelasticity*. Tashkent: M.: Mekhnat.
- [56] Badalov F.B., Eshmatov KH., Yusupov M. 1987. Some Methods of Solution of Systems of Integro-differential Equations Encountered in Problems of Viscoelasticity *Applied Mathematics and Mechanics* 51:867–871.
- [57] Badalov F.B., Khudayarov B.A., Abdugarimov A. 2007. Effect of the hereditary kernel on the solution of linear and nonlinear dynamic problems of hereditary deformable systems *Journal of Machinery Manufacture and Reliability* 36:328–335.
- [58] Khudayarov A.B., Bandurin N.G. 2007. Nonlinear Oscillation of Viscoelastic Orthotropic Cylindrical Panels. *Mathematical Models and Computer Simulations* 17:79–86.
- [59] Khudayarov A.B., Bandurin N.G. 2007. Numerical Investigation of Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Plates and Cylindrical Panels in a Gas Flow *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 48:279–284.
- [60] Khudayarov A.B. 2010. Numerical Analysis of the Nonlinear Oscillation of Viscoelastic Plate *International Applied Mechanics*. 41: 538–542.
- [61] Khudayarov A.B. 2010. Flutter of a viscoelastic plate in a supersonic gas flow *International Applied Mechanics* 46:455–460.
- [62] Matyash I.V. 1971. On the Dynamic Strength of a Hinged Supported Elastic-Viscous Rod *Mechanics of Polymers* 2:293–300.
- [63] Mirsaidov M.M., Sultanov Z.T. 2012. Use of the linear hereditary theory of viscoelasticity in dynamic calculation of earth structures *Foundations, bases and soil mechanics* 6:30–34.

Received June 20, 2019

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ПРОЦЕССЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СОЛЕ-ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ В АТМОСФЕРЕ

Хамдамов Р.Х., Равшанов З.Н., Таштемирова Н.Н.

r.hamdamov@mail.ru; ravshanzade-09@mail.ru; nodira3110@mail.ru

Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий,
100124, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улутбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А.

Для мониторинга и прогнозирования экологического состояния промышленных регионов и защиты окружающей среды от техногенных факторов разработана математическая модель, учитывающая изменение погодно-климатических факторов, эрозию почвы и параметры связанные с ними. Так как, одним из основных загрязнителей в атмосфере приаральского региона являются аэрозольные соле-пылевые частицы, то необходимо учитывать их физико-механические свойства и основные силы воздействующие процесс переноса этих частиц. В статье проведены численные расчеты для исследования процесса эрозии почвы в зависимости от скоростей воздушной массы атмосферы, размера и плотности частиц, а также сил действующих на них. Анализ численных расчетов показал, что основным триггером ветровой эрозии почвы является вихревая подъемная сила, которая на порядок превышает касательное напряжение и плотность атмосферы и растет по экспоненциальному закону в зависимости от изменения скорости воздушной массы атмосферы.

Ключевые слова: математическая модель, перенос и диффузия вредных веществ, погодно-климатический фактор, численный алгоритм.

Цитирование: *Хамдамов Р.Х., Равшанов З.Н., Таштемирова Н.Н.* Моделирование и исследование основных параметров в процессе распространения соле-пылевых частиц в атмосфере // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 78–98.

1 Введение

Прогнозирование, мониторинг и оценка экологического состояния атмосферы и подстилающей поверхности пассивными и активными примесями, размещение промышленных предприятий с соблюдением санитарных норм загрязнения регионов являются актуальными в проблеме охраны окружающей среды.

На сегодняшний день, анализ данных по окружающей среде показывает, что интенсивный рост объема промышленности оказывает большое влияние на экологический дисбаланс атмосферы промышленных регионов. В основном такие экологические проблемы заметны в высоко развитых промышленных государствах, например, таких как США, Россия, Франция, Индия, Япония, Корея и др. Конечно, рост темпа развития производства негативно влияет на экологическое состояние промышленных регионов. Ухудшение экологии в атмосфере промышленных зон возникает в связи с увеличением концентрации вредных веществ и загазованности атмосферы.

Опасное загрязнение воздуха сказывается на здоровье людей, т.к. различные химические элементы наиболее интенсивно поглощаются организмом именно при дыхании. Таким образом, актуальность математического моделирования процесса распространения вредных аэрозольных частиц очевидна.

Анализом и моделированием процесса загрязнения атмосферы промышленных регионов занимаются многие зарубежные и отечественные авторы, ими получены весомые результаты теоретического и прикладного характера.

В работе [1] приведена стационарная двумерная математическая модель для изучения рассеивания загрязнителей воздуха под воздействием городского теплоснабжения, где учитываются мезомасштабные (или локальные) ветры рассматриваемого региона. В математической модели учитывается поглощение загрязняющих веществ в процессе влажного и сухого осаждения. Полученная математическая модель численно интегрируется с использованием конечно-разностной схемы Кранка-Николсона с учетом зависимости метеорологических параметров, участвующих в скоростях ветра и профилях вихревой диффузии. Результаты показывают, что мезомасштабный ветер, создаваемый в рассматриваемом регионе, помогает загрязнителям циркулировать и двигаться вверх, что делает проблему загрязнения воздуха более серьезной и на основе анализа полученных численных расчётов сделан вывод о том, что уровень концентрации загрязняющих веществ усиливается под воздействием выше указанного фактора. Однако распределение концентрации загрязняющих веществ различается в зависимости от состояния атмосферы, а именно в неустойчивом, нейтральном и устойчивом.

В статье [2] для более адекватного описания процесса переноса и диффузии загрязняющих веществ в приземном слое атмосферы предложено новое направление для математического моделирования объекта исследования. В работе разработана трехмерная математическая модель выше указанного процесса с помощью уравнения дробного порядка. Решение задачи получено путем применения метода обобщенного интегрального преобразования и преобразования Лапласа. Как отмечают авторы дробное решение является более общим, чем традиционное решение и в решение учитывается эффект памяти в вихревой диффузии и в дробной производной, оно простое, легко реализуемое и быстро сходится. Численное моделирование проводилось для сравнения предложенного дробного решения с традиционным решением и авторы утверждают, что наилучшие результаты получены при дробном порядке производной.

В работе [3] была разработана комбинированная математическая модель для региональной динамики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. Модель включает в себя следующие модули: термодинамические уравнения для мезомасштабных атмосферных процессов в негидростатическом приближении; газовый транспорт примесей и аэрозолей с фотохимическим превращением и бинарным гомогенным зародышеобразованием; и кинетические процессы конденсации (испарения) и коагуляции. Особое внимание уделено новым механизмам образования частиц путем гомогенного зародышеобразования бинарной серной кислоты и водяного пара. С использованием этой модели были проведены численные эксперименты для изучения пространственно-временных изменений концентраций газообразных примесей и аэрозолей, а также для формирования мелких аэрозольных скоплений в районах озер Байкал (Россия) и Антверпена (Бельгия) из-за сильных промышленных источников выброса. Результаты численных экспериментов проанализированы.

В работе [4] разработана математическая модель переноса загрязнителей воздуха, выбрасываемых из точечного источника, с учетом осаждения частиц и сухого осаждения. Решение уравнения массопереноса вместе с этими условиями получается путем применения метода обобщенного интегрального преобразования Лапласа. Ре-

шение применяется в пограничном слое земли, так как были приняты во внимание изменения скорости ветра и вертикальной вихревой диффузии с высотой.

В работе [5] представлено интегральное полуаналитическое решение уравнения диффузии в атмосфере, учитывающее скорость ветра в зависимости от расстояния по ветру от источника загрязнения и высоты по вертикали. Модель учитывает механизмы трансформации и удаления как посредством химической реакции, так и процессов сухого осаждения. Показана гипотетическая дисперсия загрязняющих веществ, выбрасываемых из городских источников загрязнения в присутствии мезомасштабных ветров в неустойчивом атмосферном пограничном слое. Результаты показывают, что мезомасштабные ветры, создаваемые городскими островами тепла, адвектируют загрязняющие вещества вверх, что увеличивает интенсивность загрязнения воздуха в городских районах.

В работе [6] была разработана информационная система для моделирования распространения загрязнения атмосферного воздуха с помощью методики ОНД-86, была создана архитектура системы, разработаны и реализованы в программных модулях оригинальные алгоритмы для расчета полей значений приземных концентраций вредных веществ, для перехода от координат, используемых в методике ОНД-86, к географическим координатам, с которыми работает ArcGIS [4], для расчета среднегодовых значений концентраций и комплексного индекса загрязнения атмосферы с использованием данных роз ветров. Важными особенностями системы, отличающими ее от аналогов, является возможность моделировать КИЗА (обычно в подобных программных средствах этой возможности нет) и размещать результаты моделирования в сети Интернет.

В работе [7] представлена математическая модель, процесса рассеивания загрязняющих веществ, выброшенных из двух дымовых труб, расположенных на нефтеперерабатывающем заводе в Риеке. Вычислена концентрация опасных сточных вод на уровне земли, т. е., SO₂, CO₂ в сложной местности вокруг залива Бакара, для экспресс расчета концентраций загрязняющих веществ в них с учетом линейно растущей местности с гладкой шероховатостью и турбулентностью.

В данной работе [8] рассмотрены различные модели распространения загрязняющих веществ, описывающие состояние атмосферного воздуха с использованием различных математических подходов, учитывающих виды загрязнения, параметры выбросов, метеорологические, топографические и другие условия, влияющие на рассеивание загрязняющих веществ. Приведены ключевые требования, предъявляемые к моделям загрязнения атмосферного воздуха. Рассмотрены этапы построения и классификация моделей загрязнения атмосферного воздуха.

Монография Аргучинцева В.К. [9] посвящена описанию математических моделей, разработанных авторами, для решения задач охраны атмосферы, гидросферы и подстилающей поверхности. В качестве гидродинамической основы используются трехмерные нестационарные модели мезомасштабных процессов в атмосфере и стратифицированных водоемах. В уравнениях переноса примесей учитываются химические реакции.

В статье [11] разработана схема замыкания уравнения переноса на основе явной анизотропной модели турбулентности, позволяющая существенно повысить качество предсказания рассеяния примеси в конвективных условиях АПС по сравнению с применяемыми в настоящее время моделями атмосферной диффузии. Предложена новая эффективная модификация явно-неявного конечно-разностного метода решения пространственных нестационарных адвективно-диффузионно-кинетических уравнений

на многопроцессорных вычислительных системах с распределённой памятью, применение которой в значительной степени сокращает временные затраты на получение решения по сравнению с обычными последовательными алгоритмами. В работе с использованием методов математического моделирования систематически проведено исследование загрязнения атмосферы города Томска озоном и другими первичными и вторичными загрязнителями воздуха, выявлены особенности их пространственно-временного распределения в различное время суток и года.

В статье [12] рассматривается задача моделирования переноса взвешенных веществ в водных объектах в тех случаях, когда размер ареала их распространения значительно превышает глубину акватории. Формулируется и анализируется модель горизонтального рассеяния загрязняющих субстанций. Обсуждаются вычислительные подходы к расчету переноса взвешенных веществ в водной среде. Предлагается без сеточный, стохастический численный алгоритм, наследующий достоинства двух известных методов: метода дискретных облаков и стохастического метода дискретных частиц. Путем сравнения результатов расчетов с точным решением модельной задачи о турбулентном рассеянии шлейфа загрязнения, возникающего в результате действия непрерывного источника взвеси, демонстрируется работоспособность и особенности предложенного метода.

В работе [13] предложена математическая модель процесса переноса и диффузии аэрозольных частиц в пограничном слое атмосферы для решения задач мониторинга и прогнозирования экологического состояния воздушного бассейна промышленных регионов, где имеет место нарушение санитарных норм окружающей среды вследствие большого количества выбросов вредных веществ. В предложенной математической модели рассматриваемого процесса учитываются реальные погодноклиматические данные рассматриваемого региона, физико-механические свойства мелкодисперсных частиц и другие факторы, влияющие на объект исследования. Для численного интегрирования задачи разработан консервативный численный алгоритм, с использованием которого были проведены численные расчеты на ЭВМ.

В статье [14] разработан математический инструмент – модель, численный алгоритм и программные средства для исследования, прогнозирования и мониторинга, а также для оценки экологического состояния атмосферы и подстилающей поверхности рассматриваемого региона пассивными и активными примесями, где учитываются основные параметры и возмущения, действующие на объект в целом. В работе для определения скоростей движения аэрозольных частиц под действием воздушного потока получена система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, где учтены основные физико-механические свойства аэрозолей, которые играют важную роль в рассматриваемом процессе.

Математическая модель, учитывающая основные факторы и ориентированная на осуществление краткосрочных и среднесрочных прогнозов распределения концентрации загрязняющих веществ в пограничном слое атмосферы в промышленных регионах приведена в работе [15]. Разработанный математический инструмент основан на законе сохранения массы и импульса, описывается дифференциальным уравнением в частных производных с соответствующими краевыми и внутренними условиями. Для численного интегрирования задачи разработан эффективный консервативный численный алгоритм и соответствующее программное обеспечение, на основе которого были проведены численные расчеты на ЭВМ. Апробация математического инструмента была выполнена на примере решения задачи по мониторингу и прогнозированию концентрации твердых мелкодисперсных частиц, выбрасываемых

существующим объектом цементного производства, расположенным в Самаркандской области Узбекистана.

В статье [16] решена стационарная задача переноса и диффузии вредных веществ по всей протяженности пограничного слоя атмосферы и получено решение в аналитическом виде, показано что, скорость осаждения частиц непосредственно влияет на изменение концентрации вредных веществ в атмосфере. В проведенном автором исследовании показано, что скорость осаждения частиц может сильно влиять на итоговое распределение концентрации вредных веществ в приземном слое атмосферы, и она принимает максимальное значение у приземного слоя атмосферы. В своей работе авторы рассматривали частицы с диаметром от 10 до 100 мкм при различных высотах источников выброса и ими показаны, что при условиях неустойчивой атмосферы для частиц диаметром менее 10 мкм гравитационной составляющей скорости осаждения можно пренебречь. Для численного интегрирования задача была использована преобразования Лапласа.

В работе [17] разработана двумерная стационарная математическая модель процесса распространения вредных веществ в атмосфере с учетом гравитационного осаждения мелкодисперсных частиц, где решение получено с помощью обобщенного метода интегрального преобразования Лапласа. В статье авторы область решения задачи ограничивали приземным слоем атмосферы, и были учтены изменения скорости ветра и вертикальной вихревой диффузии. Полученные авторами результаты исследования демонстрируют влияние гравитационного режима и сухого осаждения частиц на распределение их концентрации на уровне земли, и в целом согласуются с результатами работ других исследователей.

В статье [18] проведен подробный обзор научно-исследовательских работ, посвященные проблеме математического моделирования процессов распространения и транспорта загрязняющих веществ в атмосфере выброшенных из объектов производства и строительных площадей. Авторами работ обсуждаются преимущества и недостатки наиболее популярных подходов и стратегий разработки математических моделей: гауссовы, лагранжевы, эйлеровы модели, а также модели вычислительной гидродинамики. В работе отдельное внимание уделено вопросам параметризации турбулентного перемешивания в пограничном слое атмосферы. Авторами освещаются основные методы численного решения задач, основанные на конечно-разностной аппроксимации дифференциальных операторов входящий в постановку задачи переноса и диффузии вредных веществ.

2 Постановка задачи

Для исследования основных параметров и факторов, которые существенно воздействуют на процесс изменения концентрации аэрозольных мелкодисперсных частиц в атмосфере при выбросе из промышленных объектов и эрозии почвы, рассмотрим математическую модель, описываемую полным уравнением гидромеханики [19]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + (w - w_g) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \sigma \cdot \theta = \mu \cdot \Delta \theta + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + Q \cdot \delta(x, y, z); \quad (1)$$

$$\theta(x, y, z, 0) = \theta^0(x, y, z); \quad (2)$$

$$-\mu \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \gamma(\theta - \theta_a); \quad \mu \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \gamma(\theta - \theta_a); \quad (3)$$

$$-\mu \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \gamma (\theta - \theta_a) ; \mu \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \gamma (\theta - \theta_a) ; \quad (4)$$

$$-\chi \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = \gamma (\beta \cdot \theta - F_0) \text{ при } z = 0; \quad (5)$$

$$\chi \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = \gamma (\theta - \theta_a) \text{ при } z = H. \quad (6)$$

Здесь θ - количество распространяющегося вещества; θ_0 - первичная концентрация вредных веществ в атмосфере; σ - коэффициент поглощения вредных веществ в атмосфере; δ - функция Дирака; t - время; x, y, z - координаты; μ - коэффициент диффузии; β - коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью; Q - мощность источников; F_0 - количество аэрозольных частиц, оторвавшихся от шероховатой земной поверхности; χ - коэффициент турбулентности; γ - коэффициент для приведения граничного условия к размерному виду; θ_a - концентрация взвешенных веществ в соседних областях решаемых задач.

При $H = 0$ имеем приподнятый источник на уровне $z = H$ ($F_0 = 0$). При наземных источниках $F_0 \neq 0$ ($Q = 0$).

Задачу (1)-(6) рассмотрим в области $D = (0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < H)$, когда источник расположен в приземном слое (рис.1). На рис. 1 «крестиками» обозначены наземные источники загрязнения атмосферы.

Во многих источниках величина F_0 является функцией от x, y, z, t и определяется по экспериментальным данным в зависимости от метеорологических условий, свойств подстилающей поверхности, размера и плотности пылевых частиц. В данной статье значения F_0 будем вычислять в зависимости от скорости ветра у подстилающей поверхности земли, физико-механических свойств почвы и баланса сил действующих на частицы [19].

В силу линейности дифференциального уравнения (5) мощности источников могут быть нормированы таким образом, что максимальному значению F_0 соответствовала единица. Тогда, умножая на нормирующий множитель, получим искомые значения концентраций примесей. Соответственно коэффициент турбулентности также зависит от метеорологических условий.

3 Метод решения задачи

Для решения поставленной задачи рассмотрим следующие варианты вычисления коэффициента турбулентности χ :

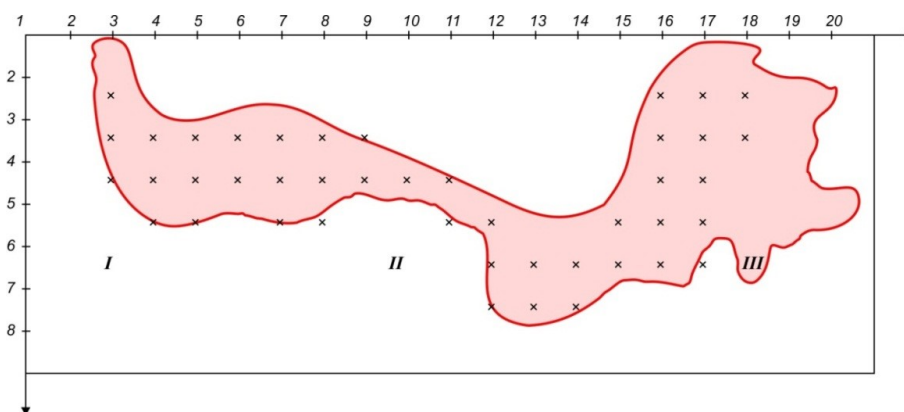


Рис. 1 Расположение источников на наземном слое в осушенной части Приаралья

1. $\chi = \text{const}, u, v, w = \text{const};$
2. $\chi = \begin{cases} v + \chi_1 \cdot \frac{z}{h}, & z \leq h, \\ v + \chi_1 \cdot \frac{z_1}{h}, & z > h, \end{cases} \quad v = |v| \cdot z^n;$
3. $\chi = \chi(z), \quad v = v(z), \quad w = w(z),$

где h – высота приземного слоя, v – турбулентная вязкость.

Из постановки задачи (1)-(6) видно, что для вычисления объема уносимых частиц с поверхности почвы, за счет эрозии необходимо определить вихревую подъемную силу F_n , которая зависит от нескольких факторов: коэффициента подъемной силы, радиуса почвенной частицы, плотности воздуха, скорости потока за пределами пограничного слоя. Как было рассмотрено в работе [20] определение подъемной силы и коэффициента подъемной силы основаны на экспериментальных определениях критической скорости потока и его можно определить, если критической скорости соответствует именно вертикальный взлет частиц. Когда мелкодисперсная частица находится в состоянии неустойчивого равновесия или выступает под общей поверхностью, она не поднимается по вертикали, а начинает двигаться по горизонтали, и причиной ее движения будет лобовое давление, а не подъемная сила.

С учетом выше сказанного, и полагая, что частицы различаются между собой лишь крупностью, используя уравнение баланса сил в проекциях на вертикальную ось в момент отрыва потоком $U = U_k$ получим:

$$F_n = mg + F_c. \quad (7)$$

Здесь F_c сила сцепления частиц.

Далее полагая, что частицы имеют форму сферы с радиусом r и плотностью ρ_n получим:

$$k_p \pi r^2 \rho_v U_k = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_n - \rho_v) g - k_f \mu_v \pi r w_g + F_c. \quad (8)$$

Для более детального изучения основных параметров, которые существенно влияют на вертикальное перемещение аэрозольных частиц в атмосфере, вводя следующие обозначение:

$$k_p = k_1; \quad x = \pi r^2 \rho_v U_k^2; \quad y = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_n - \rho_v) g; \quad b = F_c$$

и на основе материалов экспериментальных данных многофракционных почв в аэродинамической трубе и аналогичных литературных источников [21], было составлено уравнение

$$y = kx - b, \quad (9)$$

которое решено методом наименьших квадратов.

Проведенные численные расчеты показали, что имеется тесная связь между параметрами y и x . Значения коэффициента k , который является коэффициентом подъемной силы, изменяются в диапазоне от 0.03 до 0.18.

Как видно, из анализа численных расчетов и экспериментальных данных приведенных другими авторами, обобщая их можно получить значения для коэффициента подъемной силы, который равен 0.12 и он получен при достаточно широком диапазоне размеров частиц (от 0.01 до 3 мм) и плотностей (от 1400 до 11350 кг/м³). Его можно использовать при моделировании процесса переноса и диффузии аэрозольных частиц в атмосфере при учете эрозии почвы, например, при прогнозировании и

мониторинге экологического состояния Приаральского региона. В большинстве случаев, частицы имеют сферическую форму, тогда с учетом выше сказанного, лобовую силу сопротивления и подъемную силу частиц можно вычислить с помощью:

$$F_{\text{л}} = 0.0078\pi r^2 \rho_{\text{в}} U^2; \quad (10)$$

$$F_{\text{п}} = 0.12\pi r^2 \rho_{\text{в}} U^2. \quad (11)$$

Как видно из уравнений (10)-(11) при U равном критической скорости, движение частиц начинается именно под действием подъемной силы и она на порядок превосходит лобовую силу сопротивления.

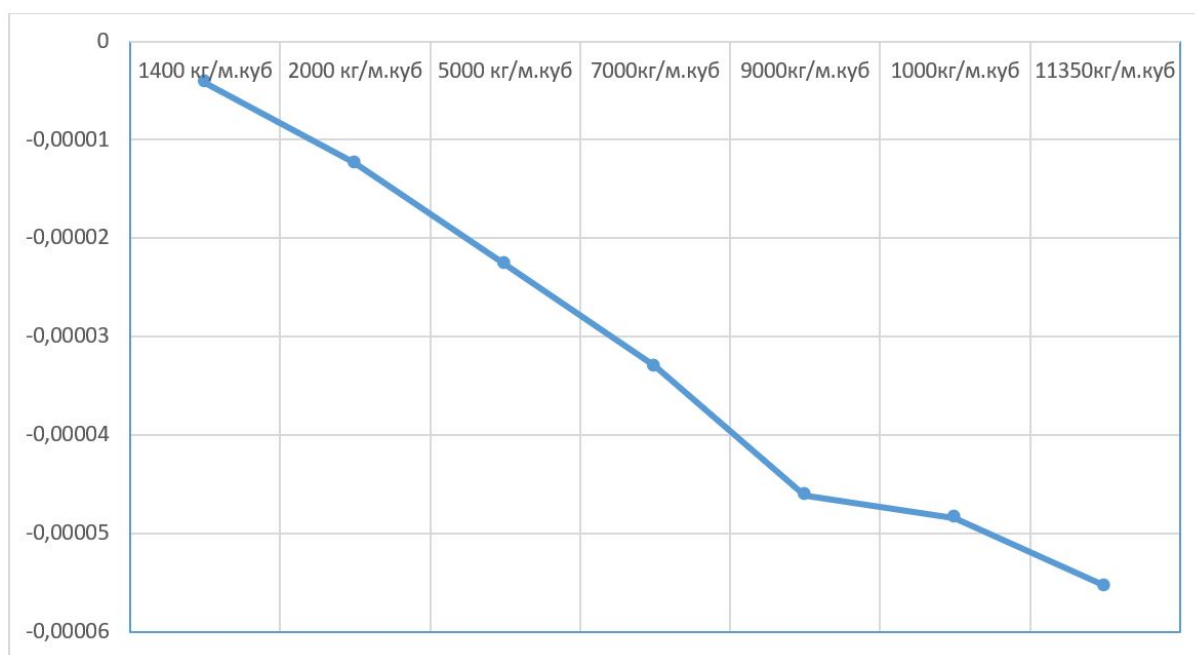


Рис. 2 Изменение силы сцепления в зависимости от плотности частиц

Численные расчеты были проведены для различных плотностей (от 1400 кг/м.куб. до 1135 кг/м.куб.) и размеров частиц. Из анализа полученных расчетов и из рис.2 видно, что при увеличении плотности частиц линейно растет сила их сцепления.

Как видно из проведенных расчетов (рис.3) один из основных факторов который существенно действует на изменение силы сцепления частиц – это скорость воздушной массы атмосферы. С ростом скорости воздушной массы атмосферы, экспоненциально растет сила сцепления частиц. Особенно этот рост заметен при $U > 4$ м/с. Аналогично, сила лобового сопротивления будет расти с ростом скорости воздушной массы атмосферы (рис.4).

Как следует из кривых рис. 5. подъемная и лобовая сила сопротивления частиц будут расти в зависимости от роста скорости воздушной массы атмосферы. Экспоненциальный рост подъемной силы частиц особенно заметен, когда скорость ветра превышает критические значения.

На рис.6 приведены изменения подъемной и лобовой силы сопротивления частиц в зависимости от их радиуса. Как следует из численных расчетов и кривых рис. 6 с

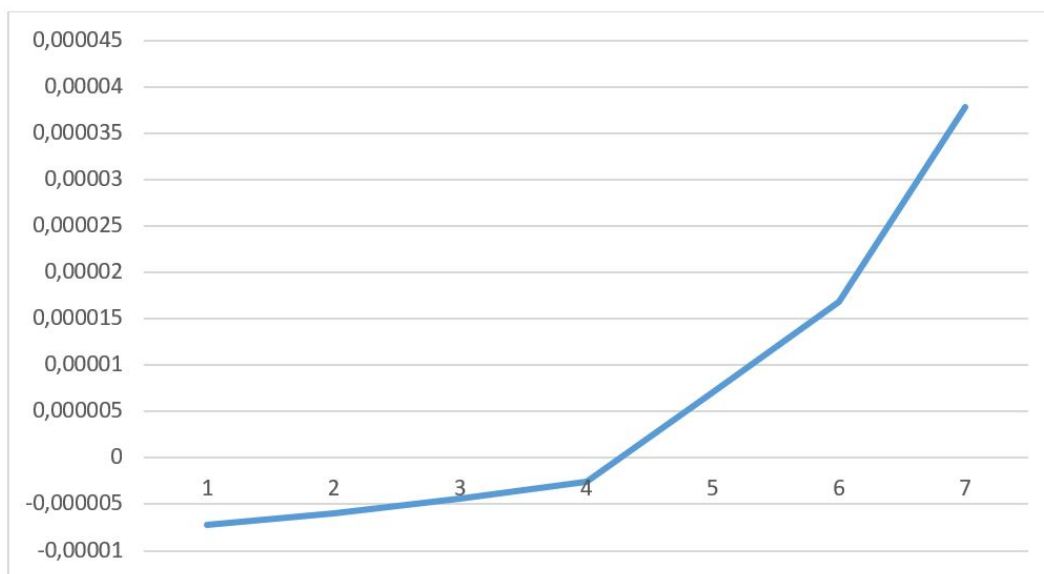


Рис. 3 Изменение силы сцепления частиц в зависимости от скорости воздушной массы атмосферы

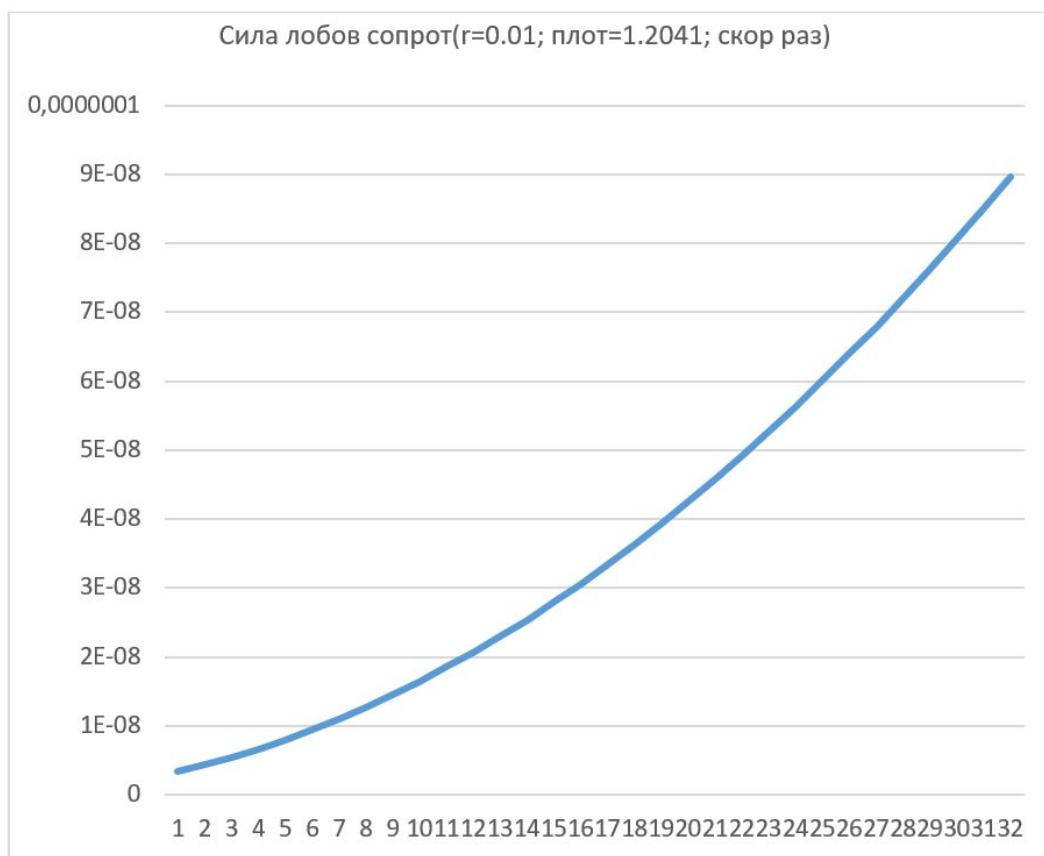


Рис. 4 Изменение силы лобового сопротивления частиц в зависимости от скорости воздушной массы атмосферы

ростом диаметра частиц экспоненциально растет их подъемная сила, а лобовая сила сопротивления незаметно растет с ростом диаметра частиц.

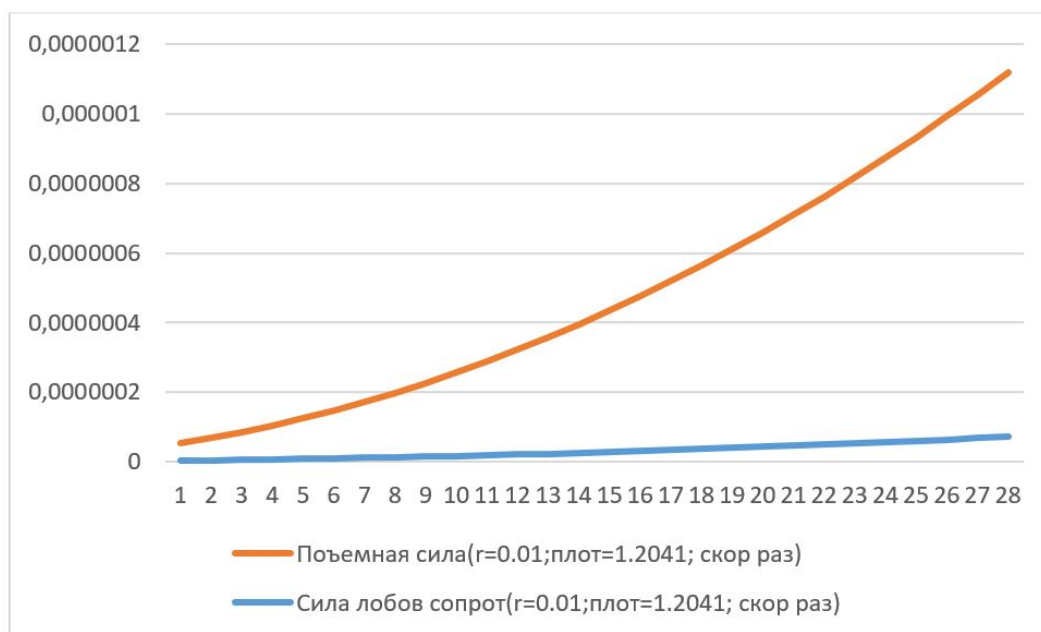


Рис. 5 Изменение подъемной и лобовой силы сопротивления частиц в зависимости от скорости воздушной массы атмосферы (при радиусе частиц $r = 0.01\text{мм}$, $\rho_n = 1.2754$)

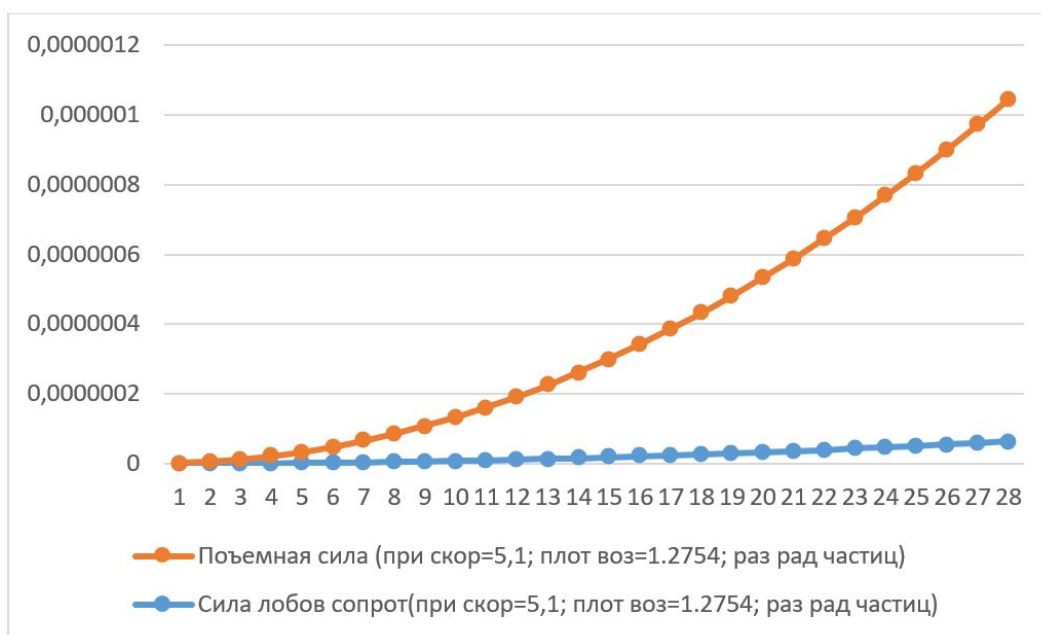


Рис. 6 Изменение подъемной и лобовой силы сопротивления частиц в зависимости от радиуса частиц

Из кривых рис. 7 видно, что еще один из основных параметров, который воздействует на силу лобового сопротивления является плотность атмосферы. С ростом плотности атмосферы сила лобового сопротивления растет.

Из кривых рис. 8 видно, что плотность атмосферы не играет существенную роль в изменении подъемной силы частиц. Она будет расти по экспоненциальному закону в зависимости от изменения скорости воздушной массы атмосферы, а сила лобового сопротивления частиц (рис. 7) заметно различается с ростом скорости воздушной массы атмосферы.

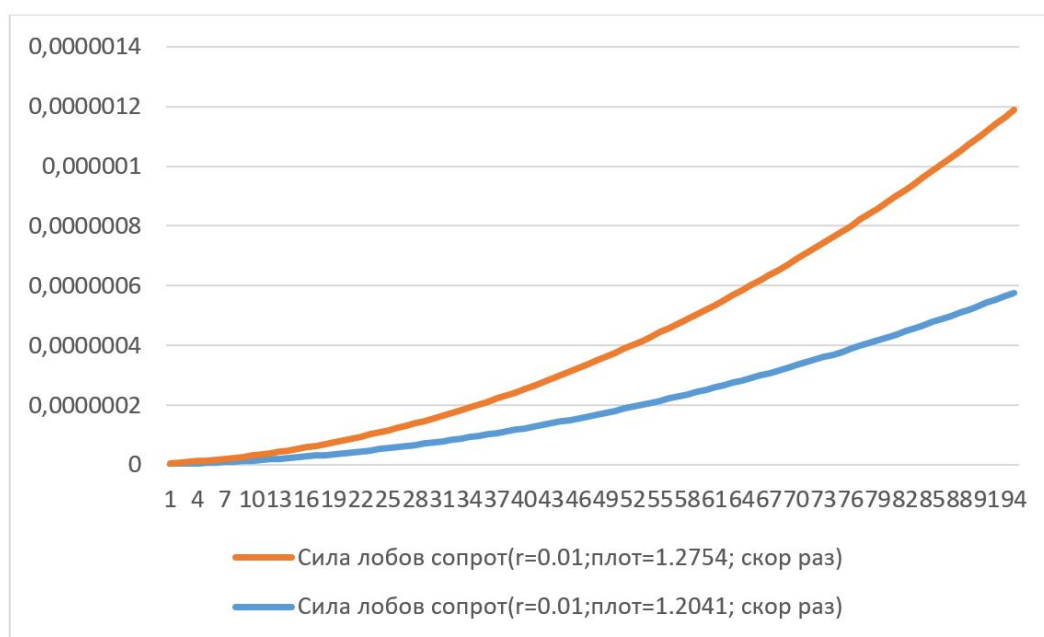


Рис. 7 Изменение силы лобового сопротивления в зависимости от плотности атмосферы (при плотности атмосферы 1.2754; 1.2041)

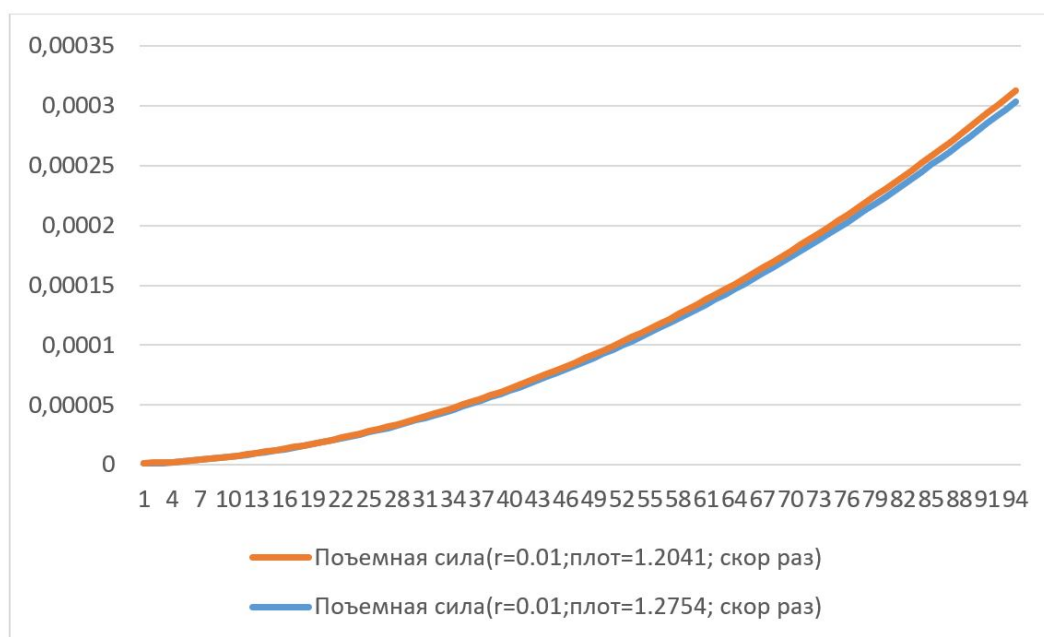


Рис. 8 Изменение подъемной силы частиц в зависимости от плотности атмосферы (при плотности атмосферы 1.2754; 1.2041)

Из анализа проведенных численных расчетов (рис. 2-8) и сопоставления уравнений (10), (11) можно прийти к выводу, что по достижению скорости потока к критической и выровненной поверхности, частица начинается двигаться именно под действием подъёмной силы, так как она примерно на порядок превосходит силу лобового сопротивления. Численными расчетами установлено, что в случае для аэрозольных мелкодисперсных частиц, стесненных со всех сторон себе подобными, по достижении критической скорости ветра, является единственным способом начала движения их по вертикали.

Анализируя результаты проведенных численных экспериментов можно прийти к выводу, что для процесса сальтации и подъема частиц с поверхности задействуется вихревая подъемная сила, которая вычисляется уравнением (11).

Исходя из сказанного выше можно прийти к выводу, что уносимый объем с поверхности почвы, за счет эрозии, непосредственно связано с силами действующими на соле-пылевые частицы в результате турбулентного движения воздушной массы атмосферы в приземном слое. К этим силам относятся лобовая сила сопротивления частиц, подъемная сила частиц и сила сцепления частиц.

Численные расчеты так же были проведены при различных критических скоростях ветра у поверхности земли, влажности почвы, коэффициента шероховатости и других физико-механических параметров рассматриваемого процесса. Из анализа результатов численных расчетов следует, что с ростом влажности почвы по экспоненциальному закону растет сила коэффициента сцепления частиц, за счет чего существенно уменьшается объем выноса мелкодисперсных частиц в атмосферу.

Проведенными численными расчетами установлено, что изменение скорости ветра по вертикали зависит от скорости динамического трения. С ростом скорости динамического трения пропорционально растет вертикальная скорость ветра на поверхности земли, а в свободном слое атмосферы она остается неизменной по толщине.

Как следует из проведенных численных расчетов на ЭВМ с ростом коэффициента шероховатости земли, горизонтальная составляющая скорость ветра пропорционально уменьшается. Этот факт можно заметить при изменении толщины слоя $0 < h < 10$ м.

Как отмечено в работах Жуковского для построения теории ветровой эрозии важное значение имеет не только сила, отрывающая почвенную частицу от поверхности, но и сила, переносящая ее по воздуху [22].

Один из существенных параметров воздействующий на процесс переноса и диффузии аэрозольных частиц в пограничном слое атмосфере, это шероховатость и неоднородность поверхности земли, в следствии чего изменяются скорости воздушного потока атмосферы в зависимости от их значений.

Изменение скорости воздушной массы атмосферы в зависимости от шероховатости поверхности земли можно определить с помощью формулы:

$$V_1 = V_0 \left(\frac{H_1}{H_0} \right)^{\zeta}; \quad (12)$$

где V_1 - скорость ветра на заданной высоте; V_0 - скорость ветра на известной высоте ($H_0 = 5$ м); H_0 - заданная высота; H_1 - высота измерения; k - эмпирический показатель шероховатости подстилающей поверхности.

На основе приведенного соотношения (12) проведены численные расчеты на ЭВМ (рис. 9-13).

Из анализа проведенных численных расчетов видно, что существенными параметрами воздействующими на процесс изменения скорости ветра по вертикали является коэффициент шероховатости, который изменяется в зависимости от высоты местности (орография), шероховатости поверхности земли, а так же высотные объекты и жилые комплексы, находящиеся в рассматриваемом регионе (рис. 9-13).

Коэффициент шероховатости изменяется от 0 до 0.45, на поверхности воды он равняется нулю, на полностью открытом ландшафте с мягкой поверхностью типа взлётно-посадочных полос в аэропортах, скошенной травой – 0.12; на открытых сельскохозяйственных землях с одиночными зданиями – 0.245; на сельскохозяйственных

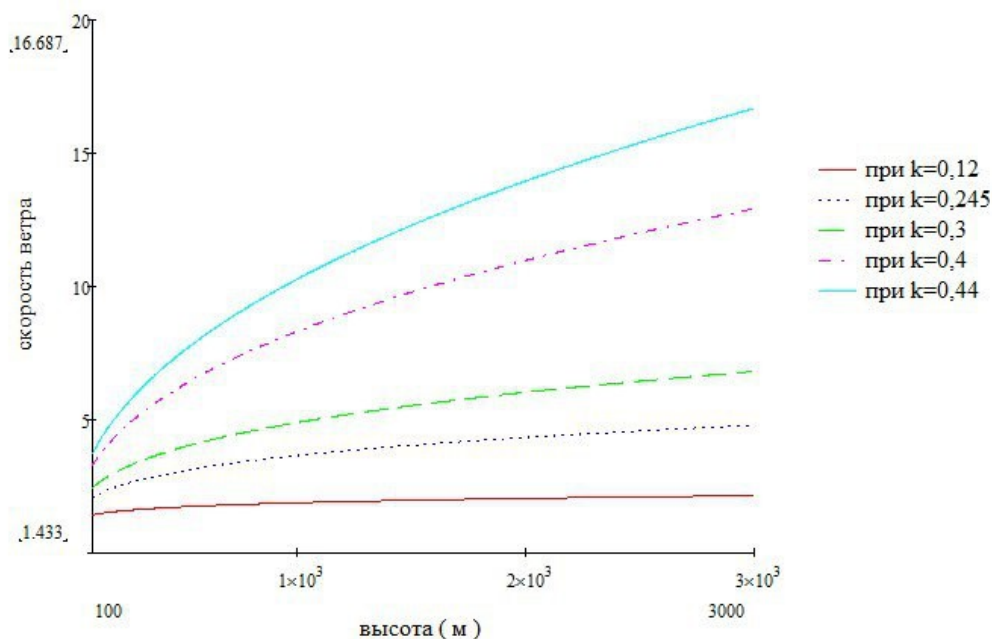


Рис. 9 Изменение скорости ветра по высоте пограничного слоя атмосферы (при $V_0 = 1 \text{ м/с}$)

землях с отдельными зданиями и 8-ми метровыми оградами на расстоянии более 1250 м – 0,275; на сельскохозяйственных землях с отдельными зданиями и 8-ми метровыми оградами на расстоянии более 500 м – 0.30; на сельскохозяйственных землях с группами зданий и 8-ми метровыми оградами на расстоянии более 250 м – 0.335; в деревнях, малых городах, на сельскохозяйственных землях с отдельными зданиями и высокими оградами, в лесах и на резко пересечённой местности – 0.370; в больших городах с высокими зданиями – 0.405; в мегаполисах с высокими зданиями и небоскрёбами коэффициент равен 0.440.

Из рис. 9 следует, что (при $V_0 = 1 \text{ м/с}$, $k = 0.12$) с ростом коэффициента шероховатости скорость ветра растет по логарифмическому закону до определенной высоты 600-750 м. по вертикали, а далее она незначительно растет по высоте. Из анализа численных расчетов видно, что (рис. 11) рост скорости ветра по высоте существенно зависит от скорости ветра на поверхности земли и коэффициента шероховатости земли (рис. 12-13).

Так как задача (1)-(6) описывается с помощью дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующих начальных, краевых и внутренних условий (полного уравнения гидромеханики), то получить аналитическое решение затруднительно. Для ее решения разработан эффективный консервативный численный алгоритм, основанный на замене дифференциальных операторов на конечно-разностные [15, 22].

На основе разработанного математического инструмента (модель, численный алгоритм и программного средства) проведены вычислительные эксперименты на ЭВМ, результаты которых приведены на рис. 14-16.

Анализ полученных численных расчетов показал, что (рис. 14-16) изменение и распространение концентрации взвешенных выбросов в рассматриваемом регионе существенно зависит от горизонтальной скорости воздушной массы атмосферы. С ростом горизонтальной скорости ветра область воздействия концентрации взвешенных

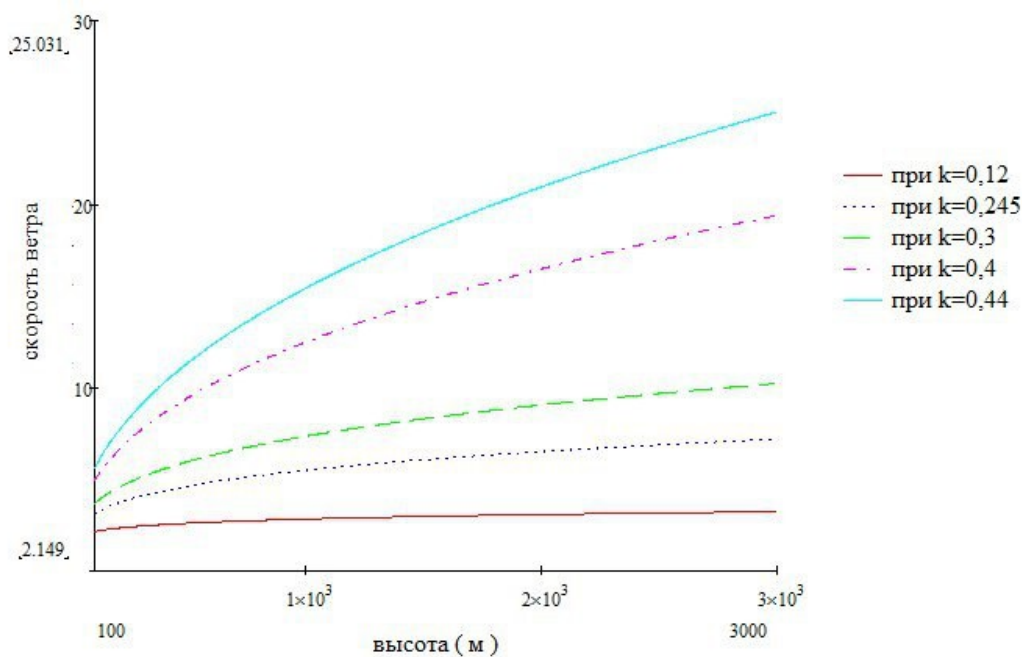


Рис. 10 Изменение скорости ветра по высоте пограничного слоя атмосферы (при $V_0 = 1.5$ м/с)

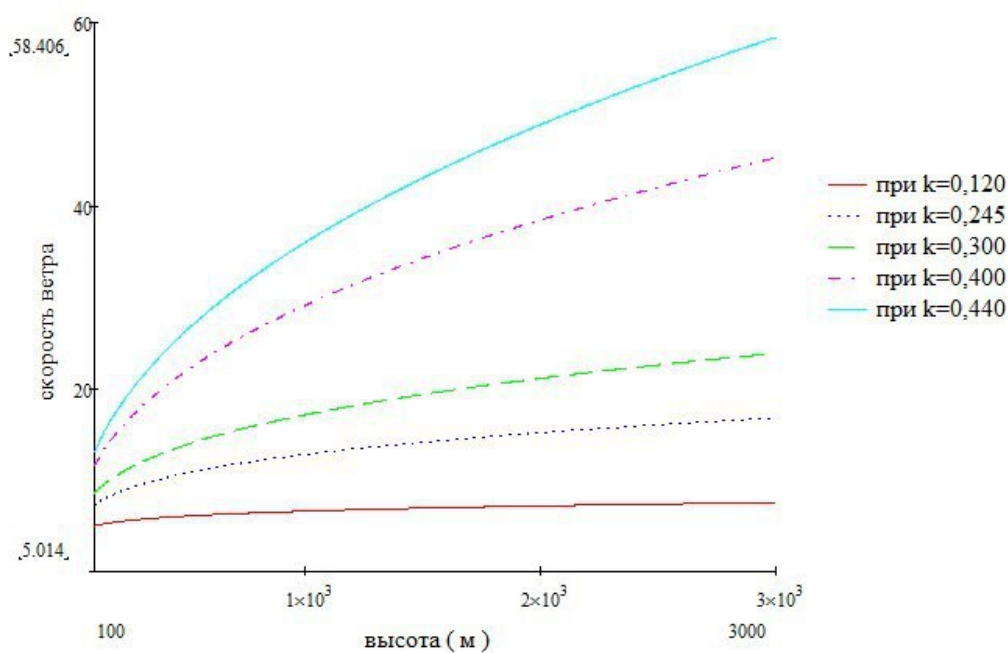


Рис. 11 Изменение скорости ветра по высоте пограничного слоя атмосферы (при $V_0 = 3.5$ м/с)

веществ пропорционально расширяется со временем, а сама концентрация аэрозольных частиц уменьшается по мере удаления от источника выброса вредных веществ.

ВЭ установлено, что с ростом скорости динамического трения пропорционально растёт скорость ветра по вертикали, а с ростом коэффициента шероховатости земли горизонтальная составляющая скорости ветра пропорционально растёт по высоте в зависимости от первоначальной скорости ветра на высоте $H_0 = 5$ м.

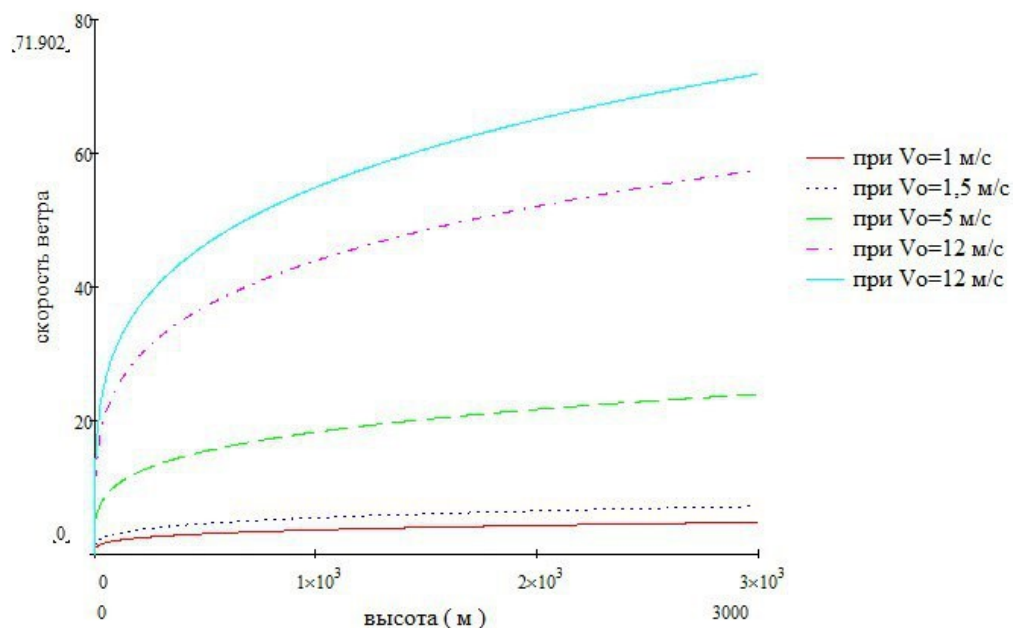


Рис. 12 Изменение скорости ветра по высоте пограничного слоя атмосферы (при $k = 0.245$)

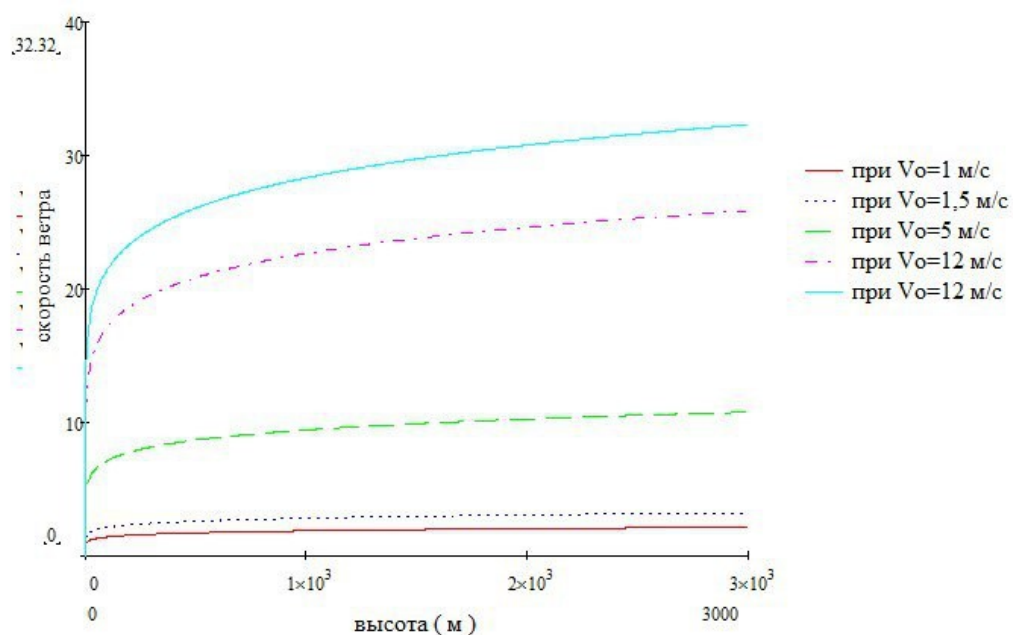
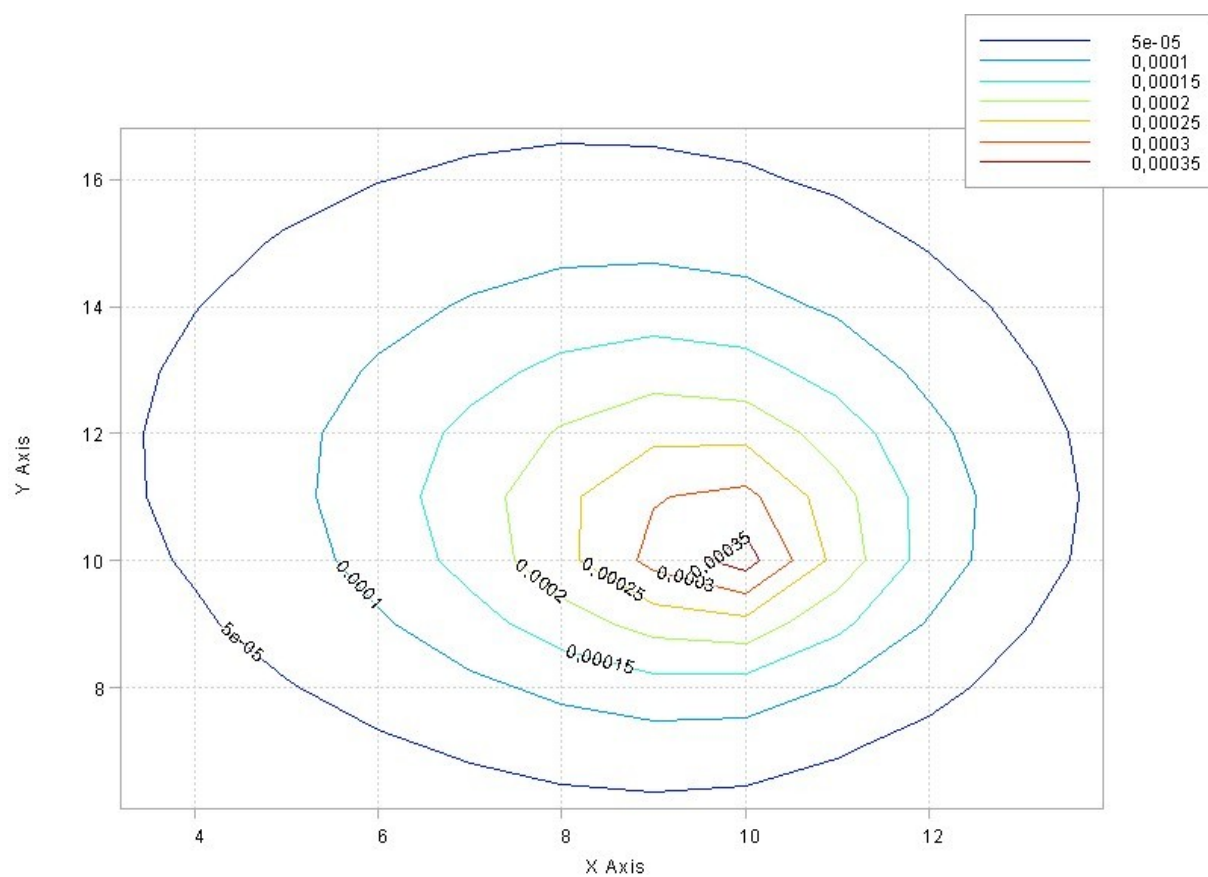
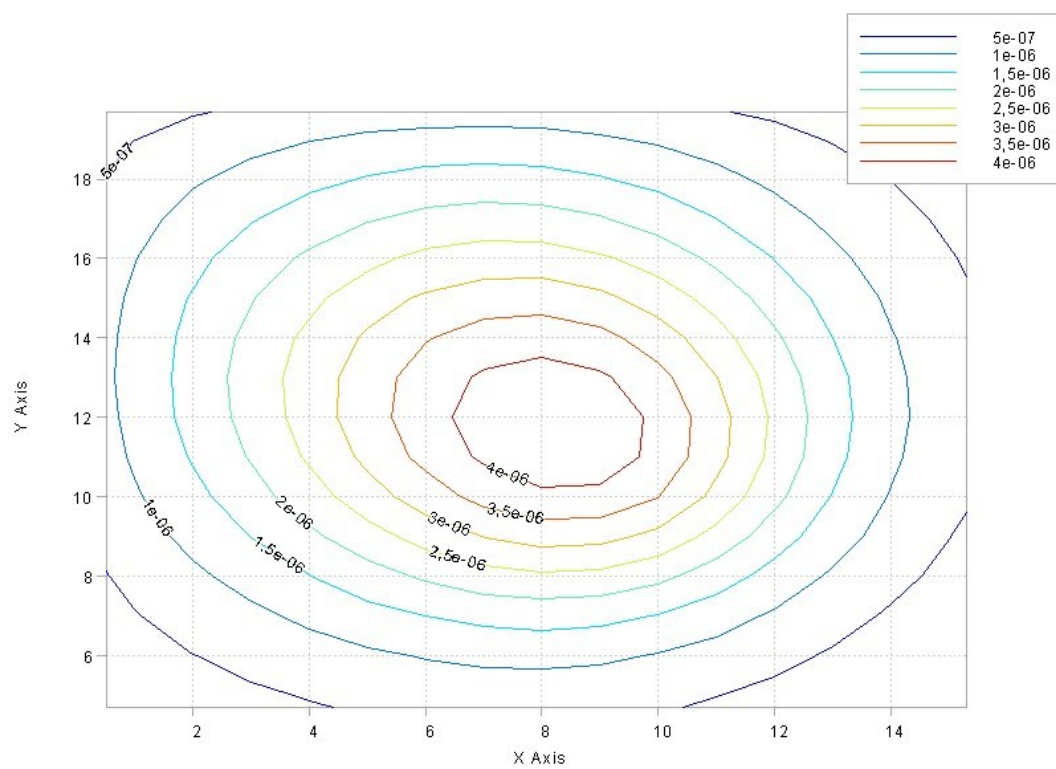


Рис. 13 Изменение скорости ветра по высоте пограничного слоя атмосферы (при $k = 0.12$)

Для прогнозирования концентрации вредных веществ в атмосфере в зависимости от выше перечисленных параметров, погодных-климатических факторов и эрозии почвы на основе разработанного программного комплекса проведены ВЭ. Расчеты проводились для области D ($0 < x, y < 21 \times 10000$ м, $0 < z < 2000$ м) с шагом сетки $h_x = h_y = 10000$ м, $L_z : 150, 300, 600, 1200, 2400$ м, шаг по времени $\Delta t = 3600$ сек, при различных значениях коэффициента турбулентности $\chi(z)$ и скорости осаднения w_g .



a)



b)

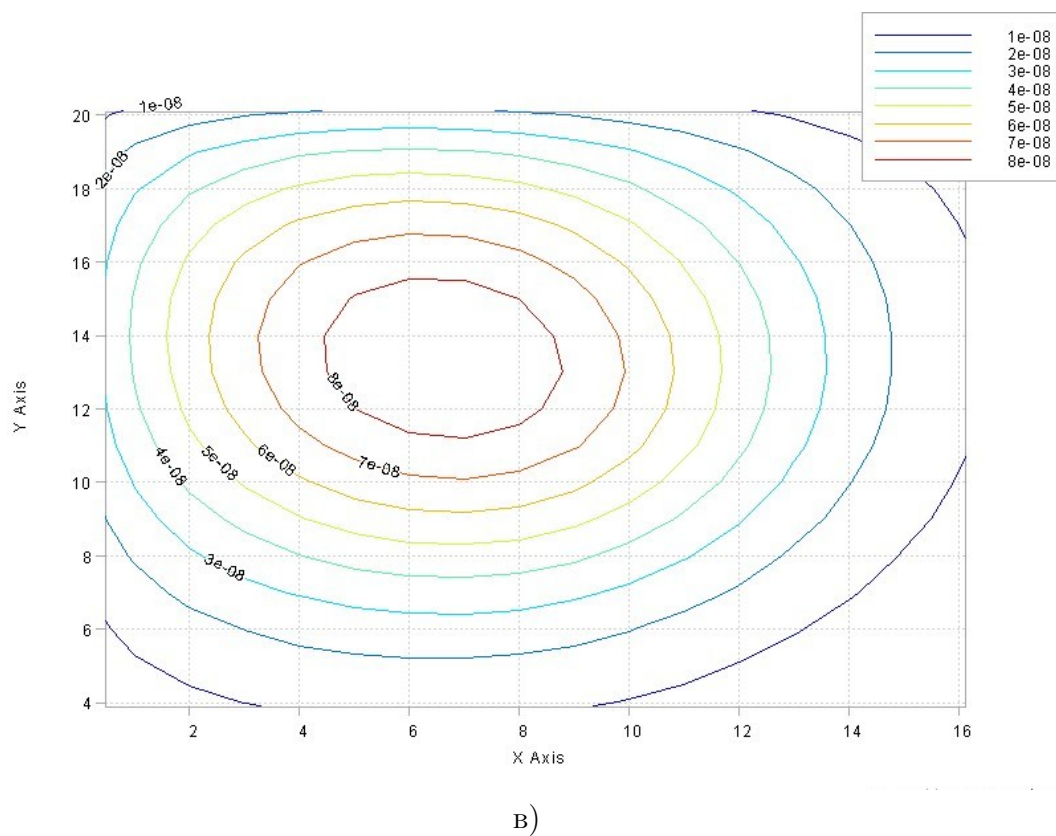


Рис. 14 Изменение концентрации оксида азота со временем: а) при $H=200$ м.; б) при $H=400$ м.; в) при $H=400$ м.

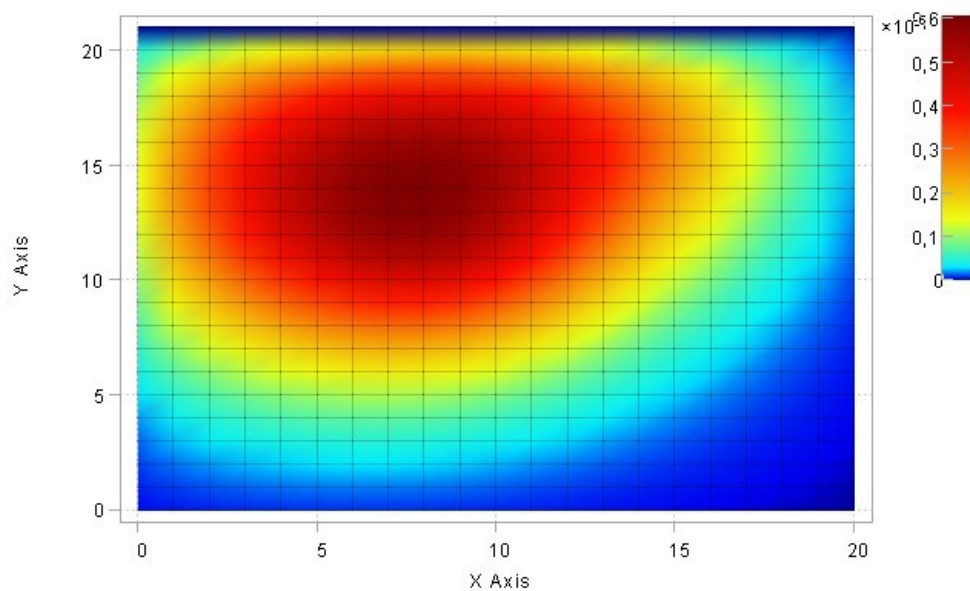


Рис. 15 Изменение концентрации окиси азота на высоте $H = 500$ м. при скорости ветра $U = 3$ м/с

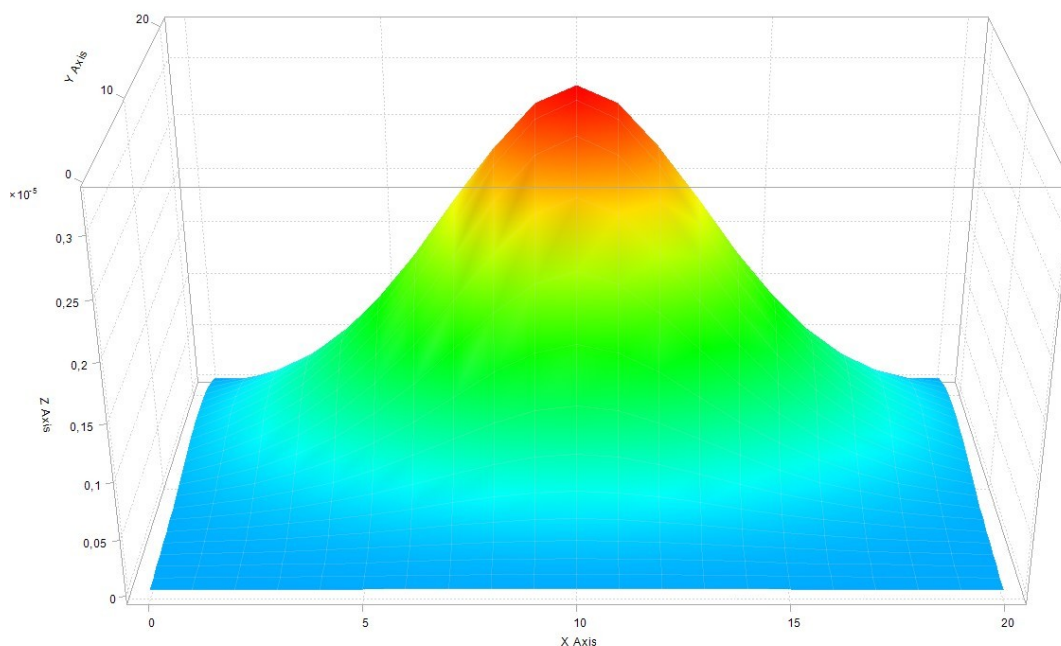


Рис. 16 Изменение концентрации окиси азота на высоте $H = 400$ м. при скорости ветра $U = 3$ м/с

Численные расчёты показывают, что перенос и диффузия осуществляются в зависимости от метеорологических условий, от свойств частиц и существенно зависят от распределения коэффициента турбулентности по вертикали.

Для прогноза распространения пыли и соли над осушенной частью Аральского моря воспользуемся моделью 3. Для $\chi(z)$ используется характерное значение при слабой неустойчивой стратификации, а для скорости ветра - степенной закон изменения. В ходе ВЭ было установлено, что, когда источники находятся в северо-восточной части осушенной зоны Южного Приаралья или в средней части осушенной зоны при слабой неустойчивой стратификации, в случае с северным ветром - аэрозоль не доходит до города Нукуса, а при северо-восточном ветре - достигает Нукуса.

Количество аэрозоля, выпавшего на Нукус составило $5 \cdot 10^{-8}$ (г/м²), когда источники находятся в северо-восточной части, и $15 \cdot 10^{-8}$ (г/м²) - когда источники находятся в средней зоне.

Из проведённых численных расчетов (рис. 14-16) видно, что на объем уноса мелкодисперсных частиц с поверхности осушенной части Аральского моря существенно воздействуют:

- а) составляющие скорости ветра на поверхности земли, с ростом этого параметра логарифмически растёт объем уносимых аэрозольных частиц в атмосферу. Он существенно зависит от шероховатости поверхности земли и высоты объектов расположенных в регионе и плотности зданий находящихся в районе;
- б) растительность и влажность почвы рассматриваемого региона, с ростом этого показателя резко уменьшается количество выброса вредных веществ в атмосферу и их рассеивание в атмосфере;
- с) коэффициент шероховатости земли (рис. 9-13), который является основным параметром для изменения скорости ветра по высоте слоя атмосферы.

4 Выводы

Проведёнными численными расчетами установлено, что коэффициент вихревой подъемной силы является постоянным, и он не зависит от формы частиц и их плотности.

Анализ численных расчетов показал, что основной движущей силой ветровой эрозии почвы является вихревая подъемная сила, которая на порядок превышает касательное напряжение.

Из анализ полученных расчетов следует, что плотность атмосферы не играет существенную роль в изменении подъемной силы частиц.

Численными расчетами установлено, что существенными факторами, влияющими на процесс эрозии почвы и транспорт соле-пылевых частиц в Приаральском регионе являются: критическое значение скорости ветра у поверхности земли, влажность почвы, коэффициент шероховатости земли и связанные физико-механические свойства породы.

Установлено, что с ростом влажности почвы по экспоненциальному закону растет сила коэффициента сцепления частиц, вследствие чего существенно уменьшается объем выноса мелкодисперсных частиц в атмосферу.

Литература

- [1] *Agarwal M., Tandon A.* Modeling of the urban heat island in the form of mesoscale wind and of its effect on air pollution dispersal // *Applied Mathematical Modelling*. – 2010. – № 34. – P. 2520-2530.
- [2] *Davidson M.M., Xavier P., Palmeira A., Nascimento E.* New approach to solving the atmospheric pollutant dispersion equation using fractional derivatives // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2019. – № 144. – 118667.
- [3] *Aloyan A., Yermakov A., Zagaynov V., Mensink C.* Modeling the Regional Dynamics of Gaseous Admixtures and Aerosols in the Areas of Lake Baikal (Russia) and Antwerp (Belgium) // *Aerosol and Air Quality Research*. – 2012. – № 12. – P. 707-721.
- [4] *Chandra P., Jaipal, Katiyar V.K.* Mathematical model for dispersion of air pollutant considering settling of particles and dry deposition // *Int. J. of Mathematical Sciences and Applications*. – 2011. – Vol. 1, № 3. – P. 707-721.
- [5] *Davidson M.M., Albuquerque T.* Solution of the Atmospheric Diffusion Equation with Longitudinal Wind Speed Depending on Source Distance // *Revista Brasileira de Meteorologia*. – 2016. – Vol. 31, № 2. – P. 202-210.
- [6] *Смирнов Е.А.* Информационная система для моделирования распространения загрязнения атмосферного воздуха с использованием ArcGIS // *Актуальные вопросы технических наук: материалы Междунар. науч. конф.* – Пермь: Меркурий, 2011. – С. 27–31.
- [7] *Mrša Z., Čavrak M.* Modeling of dispersion and diffusion of pollutants from industrial chimney stacks in rijeka refinery // *4th International Congress of Croatian Society of Mechanics*. – Bizovac, 2003. – P. 18-20.
- [8] *Рыбак В.А., Рыбьичина О.П., Гриб А.Д.* Моделирование переноса загрязнения окружающей среды в атмосферном воздухе и водных объектах // *ВЕСНИК СУВЯЗІ* 51. – 2003. – № 5(157). – С. 51-55.
- [9] *Аргучинцев В.К., Аргучинцева А.В.* Моделирование мезомасштабных гидротермодинамических процессов и переноса антропогенных примесей в атмосфере и гидросфере региона оз. Байкал. – Иркутск : Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2007. – 255 с.
- [10] *Беликов Д.А.* Параллельная реализация математической модели атмосферной диффузии для исследования распределения первичных и вторичных загрязнителей воздуха

- над урбанизированной территорией : дисс. в Техносфере. – Томск, 2006. – URL:<https://bit.ly/3a0W0fB>.
- [11] *Котеров В.Н., Юрезанская Ю.С.* Моделирование переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе. Горизонтальное рассеяние // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Том 50, № 2. – С. 375-387.
 - [12] *Степаненко С.Н., Волошин В.Г., Тупцов С.В.* Динамическая модель рассеяния вредных веществ в атмосфере при постоянных коэффициентах диффузии и скоростях переноса // Украинский гидрометеорологический журнал. – 2010. – № 7. – С. 53-67.
 - [13] *Ravshanov N., Shertaev M., Toshtemirova N.* A Mathematical Model for the Study and Forecast of the Concentration of Harmful Substances in the Atmosphere // American Journal of Modeling and Optimization. – 2015. – Vol. 3, № 2. – P. 35-39.
 - [14] *Ravshanov N., Shafiev T.* Nonlinear mathematical model for monitoring and predicting the process of transfer and diffusion of fine-dispersed aerosol particles in the atmosphere // Journal of Physics: Conf. Series. – 2019. – Vol. 1260. – 102013. – doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1260/10/102013>.
 - [15] *Sharipov D., Muradov F., Akhmedov D.* Numerical Modeling Method for Short-Term Air Quality Forecast in Industrial Regions // Applied Mathematics E-Notes. – 2019. – № 19. – P. 575-584.
 - [16] *Tirabassi T., Moreira D.* A solution of the time-dependent advection-diffusion equation // Proc. of 18th Int. Conf. on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes. – Bologna (Italy). – 2017. – P. 934-938.
 - [17] *Chandra P., Jaipal, Katiyar V.* Mathematical model for dispersion of air pollutant considering settling of particles and dry deposition // Int. J. of Mathematical Sciences and Applications. – 2011. – Vol. 1, № 3. – P. 1591-1595.
 - [18] *Leelossy A., Molnar F., Izsak F., Havasi A., Lagzi I., Meszaros R.* Dispersion modeling of air pollutants in the atmosphere // Central European Journal of Geosciences. – 2014. – Vol. 6, № 3. – P. 257-278.
 - [19] *Таштемирова Н.* Моделирование процесса распространения мелкодисперсных аэрозольных частиц в атмосфере с учетом эрозии почвы // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2019. – № 3. – С. 54-68.
 - [20] *Жуковский Н.Е.* О снежных заносов и заиливание рек // Москва Н.К.З. Опытномелиоративная часть. – 1923. – Вып. 30. – С. 13-29.
 - [21] *Гандугов, Г. Глазунов.* Ветровая эрозия почвы и запыление воздуха. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007. – С. 240.
 - [22] *Равшанов Н., Таштемирова Н., Мурадов Ф.* Атмосферадаги аэрозол заррачаларининг кучиши ва диффузияси масаласини ечимини мавжудлиги ва ягоналигини тадқиқ қилиш // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2017. – № 1. – С. 54-68.

Поступила в редакцию 01.03.2020

UDC 519.6

MODELING AND RESEARCH OF BASIC PARAMETERS IN THE PROCESS OF DISTRIBUTION OF SALT-DUST PARTICLES IN THE ATMOSPHERE

Khamdamov R.Kh., Ravshanov Z.N., Tashtemirova N.N.

r.hamdamov@mail.ru; ravshanzade-09@mail.ru; nodira3110@mail.ru

Scientific-innovative center of information and communication technologies,

100124, 17A Buz-2, Mirzo-Ulugbek district, Tashkent, Uzbekistan.

For monitoring and predicting the ecological state of industrial regions and for protection against technogenic factors, a mathematical model has been developed that considers changes in weather and climate factors, soil erosion, and parameters associated with them. Since one of the main factors affecting the change in the concentration of harmful substances in the atmosphere of the Aral Sea region is aerosol salt and dust particles, it is necessary to take into account their physical and mechanical properties and determine the main forces affecting the object during mathematical modeling and conducting a comprehensive study of the transport process of these particles. In the article numerical calculations were carried out in order to study the process of soil erosion, depending on the speed of the air mass of the atmosphere, the size and density of particles, as well as the forces affecting them. An analysis of numerical calculations showed that the main driving force of wind soil erosion is the vortex lifting force. Which is more than the tangential stress and the atmosphere density, but does not play a big role in changing the lifting force of particles, it will grow exponentially depending on changes in the speed of the air mass of the atmosphere.

Keywords: mathematical model, transport and diffusion of harmful substances, weather and climate factor, numerical algorithm.

Citation: Khamdamov R.Kh., Ravshanov Z.N., Tashtemirova N.N. 2020. Modeling and research of basic parameters in the process of distribution of salt-dust particles in the atmosphere. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26):78–98.

УДК 519.95

ПОВЫШЕНИЕ ОБОБЩАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И СЕЛЕКЦИЯ ОБУЧАЮЩИХ ВЫБОРОК

Марахимов А.Р., Худайбергенов К.К., Игнатьев Н.А.

a.marakhimov@nuu.uz, kabul85@mail.ru

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,

ул. Университетская, 4, Ташкент 100174, Узбекистан

Оценка количества скрытых слоев и нейронов, необходимых для решения задач распознавания образов и классификации, является одной из ключевых проблем в нейронных сетях. В этой статье показано, что искусственная нейронная сеть с d входами, d нейронами в первом скрытом слое, $2d+2$ нейронами во втором скрытом слое и с сигмоидальной бесконечно дифференцируемой функцией может решать задачи классификации с заданной точностью. Результаты могут быть применены для проектирования систем распознавания образов и классификации с оптимальной структурой по числу скрытых нейронов и скрытых слоев. Экспериментально доказана прямая зависимость между оценками компактности и обобщающей способностью нейронных сетей. Экспериментально доказано через минимальное количество скрытых слоев, количество нейронов в скрытых слоях и удаление шумовых объектов на показатели обобщающей способности нейронной сети.

Ключевые слова: нейронные сети, скрытые слои, сигмоидальная функция, классификация, шумовые объекты.

Цитирование: Марахимов А.Р., Худайбергенов К.К., Игнатьев Н.А. Повышение обобщающей способности нейронных сетей и селекция обучающих выборок // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 99–107.

1 Введение

За последние два десятилетия произошли огромные изменения в области искусственных нейронных сетей и их применениях. В частности, был достигнут значительный рост в применениях нейронных сетей с многослойной архитектурой [1]–[4]. Области применения искусственной нейронной сети включают широкие направления такие как в медицине, биологии, принятия решений, финансах, инженерии и т.д. Исследователи искусственных нейронных сетей экспериментировали с различными типами моделей нейронных сетей, использующих многослойные архитектуры, например, сверточные нейронные сети [5], каскадные нейронные сети [6], глубокие нейронные сети [7, 8], рекуррентные нейронные сети [9] и др.

Однако с теоретической точки зрения проблемы нижней и верхней границ нейронов в скрытых слоях и количество скрытых слоев для задач классификации и распознавания образов еще недостаточно изучены. Например, в работах [10, 15] полученные результаты по оценке количества нейронов скрытого слоя, связаны только с многослойным персептроном и обучающей возможностью нейронных сетей. В [16, 17] авторы предложили применить метод разложения по сингулярным числам (SVD) для оценки числа скрытых нейронов. Однако алгоритмы вычисления разложения по сингулярным числам являются трудоемким процессом. Кроме того, в [18] был предложен метод, заключающийся в применении метода разложения по сингулярным

числам и метода главных компонент (РСА) после обучения сети для настройки параметров сети. После обучения сети, количество скрытых нейронов фиксируется на количестве сингулярных значений или собственных значений, которое получается из операций над матрицами.

А также, в [19] было установлено границы числа скрытых нейронов в сети особого типа, которая называется многозначно много-пороговым нейронными сетями. Они изучали свойства нейронной сети с q -значной функцией, определенной в некотором пространстве. Полученные результаты могут найти реализации для построения моделей в частных случаях.

Однако результаты такого рода ограничены конкретными ситуациями и не дают фундаментальной теории для изучения вычислительных возможностей нейронной сети в целом.

Нейронные сети не являются эффективным, если количество нейронов в скрытом слое и количество скрытых слоев заданы без теоретического обоснования. В данной статье, показывается, что существует оптимальная архитектура для нейронных сетей с двумя скрытыми слоями. Хотим предоставить нейронную сеть с двумя скрытыми слоями с бесконечно дифференцируемой сигмоидальной функцией активации, d нейронами в первом слое, $2d+2$ нейронами во втором слое и способностью решать задачи классификации и распознавания образов с заданной произвольной точностью.

Модель нейронной сети с одним скрытым слоем с r нейроны в скрытом слое и вход $x = (x_1, \dots, x_d)$ имеет функцию следующего вида

$$y = \sum_{i=1}^r c_i \sigma(w^i \cdot x - \theta_i),$$

где w^i - весовой вектор на R^d , θ_i - пороговые значения, c_i - коэффициенты and σ - одномерная функция, которая называется функцией активации в нейронной сети.

2 Постановка задачи

Рассматривается стандартная постановка задачи распознавания, в которой все объекты описываются набором количественных признаков $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$ и обучающая выборка $E_0 = (S_1, \dots, S_m)$ представлена непересекающимися классами $K_1, \dots, K_k$. Пусть целевая функция классификации $F : R^n \rightarrow R^k$ определено следующим образом

$$F(x) = \sum_{i=1}^N w_i \sigma \left(\sum_{j=1}^M \sigma(w_{ij}x - \theta_{ij}) - b_i \right) \quad (1)$$

где w_i, w_{ij} - весовые коэффициенты входных и выходных слоёв, соответственно. b_i, θ_{ij} - пороговые значение. $\sigma(\cdot)$ - функция активации. Требуется построить нейронную сеть для распознавания.

3 Основной результат

Результат основан на способности универсальной свойстве аппроксимации нейронных сетей. Нейронная сеть может аппроксимировать любую непрерывную функцию на любом компактном подмножестве R с заданной произвольной точностью. Результаты Курковой [20, 21] показали, что произвольная непрерывная функция может быть достаточно хорошо аппроксимирована нейронной сетью двумя скрытыми слоями с одномерной сигмоидальной активационной функцией. Однако, согласно этим результатам, количество нейронов в скрытых слоях, необходимых для реализации в

аппроксимации, является чрезвычайно большим. На определение количества нейронов в скрытых слоях впервые установили Маиров и Пинкус [22]. Они показали, что существует сеть с двумя скрытыми слоями с сигмоидальной функцией активации, для которой можно достаточно сделать произвольное аппроксимацию произвольно любой непрерывной многомерной функции.

Позднее наилучший результат был получен Вугаром [23] для нейронных сетей прямого распространения с двумя скрытыми слоями. А именно, он показал, что нейронная сеть с d входами, d нейронами в первом скрытом слое, $2d + 2$ нейронами во втором скрытом слое и с специально сконструированной сигмоидальной и бесконечно дифференцируемой функцией активации может выполнять аппроксимацию любой непрерывной многомерной функции с произвольной точностью.

Нами было показано, что с помощью расширяем вышеупомянутые ([23]) свойств аппроксимации для нейронных сетей прямого распространения с многомерным выходом, можно решать задачи классификации и распознавания образов. А именно, мы показали, что нейронная сеть прямого распространения с d входами, d нейронами в первом скрытом слое, $2d + 2$ нейронами во втором скрытом слое, k выходами и с сигмоидальной и бесконечно дифференцируемой функцией активации может решать проблемы классификации и распознавания образов с заданным произвольным точностью. Ниже приводится теорема для нейронных сетей прямого распространения с двумя скрытым слоем.

Теорема 1. [24] Пусть Q компактное множества на R^d . Для любых положительных чисел $\alpha \in R$ и $\lambda \in R$, существует $C^\infty(R)$, сигмоидальная функция активации $\sigma : R \rightarrow R$ который строго возрастающий на $(-\infty, \alpha)$, λ -строго возрастающий на $[\alpha, +\infty)$, и удовлетворяющим следующим свойствам: Для $\forall f \in C(Q, R^k)$ и $\varepsilon > 0$ существует k -мерные действительные векторы $d_p = (d_p^{(s)})$, $\lambda_p = (\gamma_p^{(s)})$, c_{pq} , θ_p и реальная матрица w_{pq} для которого

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^k \sum_{p=1}^{2d+2} d_p^{(i)} \sigma \left(\sum_{q=1}^d c_{pq} \sigma(w_{pq} \cdot x - \theta_{pq}) - \gamma_p^{(i)} \right) \right\| < \varepsilon$$

для всех $x = (x_1, \dots, x_d) \in Q$.

4 Отбор шумовых объектов и меры компактности обучающих выборок

Результаты классификации объектов классов предлагается оценивать с помощью специальных мер компактности. Поиск и удаление шумовых объектов при формировании обучающих выборок является одним из способов повышения обобщающей способности распознающих алгоритмов. Меры компактности служат средством анализа изменений в структуре выборки при удалении шумовых объектов.

В данной работе множество шумовых объектов рассматривается как подмножество граничных объектов классов по заданной метрике. Множество граничных объектов $B \subset E_0$ определяется как

$$B = \left\{ S \in E_0 \mid \rho(S_i, S) = \min_{S_i \in K_j, S_d \in CK_j} \rho(S_i, S_d) \right\}.$$

Объект $S \in B \cap K_j$, $j=1, \dots, l$ принадлежит множеству шумовых объектов D_j класса K_j , если

$$\left| \left\{ S_i \in E_0 \mid \rho(S_i, S) = \min_{S_i \in CK_j, S_d \in K_j} \rho(S_i, S_d) \right\} \right| > \left| \left\{ S_i \in K_j \mid \rho(S_i, S) < \min_{S_i \in K_j, S_d \in CK_j} \rho(S_i, S_d) \right\} \right|. \quad (2)$$

Для проверки условия (2) нужно определить:

- число объектов из CK_j , для которых $S \in B \cap K_j$ является ближайшим по метрике $\rho(x, y)$;
- количество выполненных неравенств вида $\rho(S_i, S) < \min_{S_i \in K_j, S_d \in CK_j} \rho(S_i, S_d)$ для объектов $S_i \in K_j$.

Поиск шумовых объектов по (2) имеет смысл, если число $|K_j \cap B| > \frac{\max_{1 \leq i \leq l} |K_i|}{|K_j|}$, $j=1, \dots, l$. Считается, что обобщающая способность алгоритма повышается, если дать ему возможность ошибаться на определяемых объектах выборки. В нашем случае в качестве таковых рассматриваются объекты из $\bigcup_{i=1}^l D_i$.

Пусть представители класса $K_i \cap (E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j)$, $i=1, \dots, l$ разделены на минимальное число μ непересекающихся групп объектов $G_{i1}, \dots, G_{i\mu}$ по алгоритму из [25], $m_{ij} = |G_{ij}|$, $j = 1, \dots, \mu$, $\sum_{j=1}^{\mu} m_{ij} = m_i$. Для анализа результатов разбиения класса K_i на непересекающиеся группы с учетом их числа, представительности (по количеству объектов) и удаления шумовых объектов предлагается использовать такую структурную характеристику как оценка компактности

$$\Theta_i = \frac{\sum_{j=1}^{\mu} m_{ij}^2}{m_i^2}. \quad (3)$$

Очевидно, что множество допустимых значений Θ_i по (3) лежат в интервале $\left[\frac{1}{m_i}, 1\right]$. Если группа G_{i1} содержит все объекты из $K_i \cap (E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j)$, то $\Theta_i = 1$. Усредненная оценка компактности обучающей выборки в целом производится с учетом доли $\left(\frac{|E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i|}{m}\right)$ исключенных из рассмотрения по (2) шумовых объектов как

$$R\left(E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i, \rho\right) = \left(\frac{|E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i|}{m}\right) \frac{\sum_{i=1}^l m_i \Theta_i}{|E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i|} = \frac{\sum_{i=1}^l m_i \Theta_i}{m}. \quad (4)$$

Значения (3) и (4) косвенно свидетельствуют об однородности (неоднородности) структуры обучающей выборки. Чем ближе сходство групп по числу входящих в них объектов класса, тем ближе значение (3) к $\frac{1}{m_i}$, а (4) – к $\frac{l}{m}$. При $R(E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i, \rho) = 1$ число групп объектов на $E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j$ равно числу классов. Множество значений по (3) и (4) соответственно в $\left[\frac{1}{m_i}, 1\right]$ и $\left[\frac{l}{m}, 1\right]$ предлагается рассматривать в качестве меры компактности классов и выборки в целом. Значения мер компактности в указанных выше интервалах можно использовать для обнаружения скрытых закономерностей по базам данных.

5 Вычислительный эксперимент

Нейронная сеть обучаемой основанных на граничных объектах, определяемых на основе расстояний между объектами обучающей выборки, и связь их с показателями обобщающей способности алгоритмов демонстрируется на данных из (<http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets>). Для вычисления множества шумовых объектов классов применялись метрики Евклида и Чебышева.

В табл. 1 и 2 представлена результаты вычислительного эксперимента по метрике Евклида.

Таблица 1 Результаты эксперимента на данных Wine Quality

№	Компактность групп			Усредненная компактность	Шумовые объекты	Точность
	1	2	3			
Без предобработки	0.22	0.10	0.14	0.025	-	88.17%
С предобработкой	0.50	0.20	0.19	0.027	40	100%

Таблица 2 Результаты эксперимента на данных Australian

№	Компактность групп		Усредненная компактность	Шумовые объекты	Точность
	1	2			
Без предобработки	0.08	0.05	0.01	-	78.25%
С предобработкой	0.76	0.16	0.10	93	100%

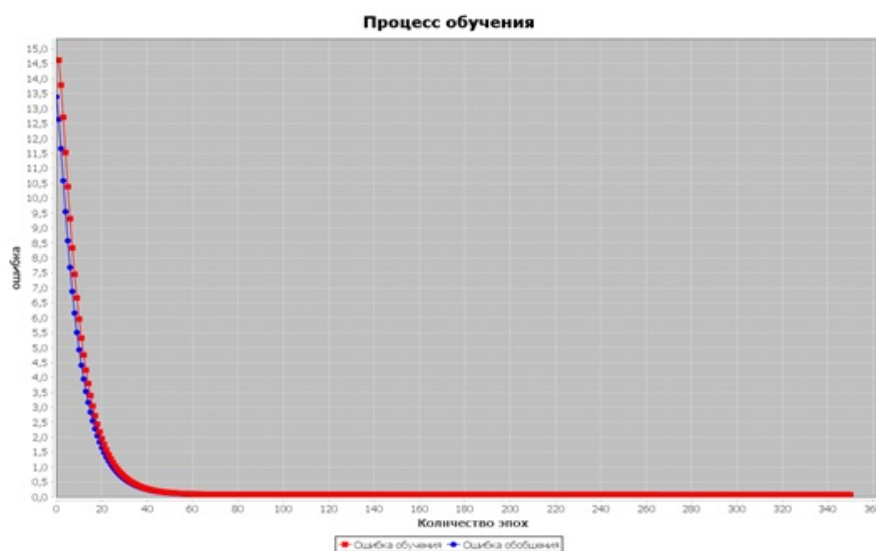


Рис. 1 Процесс обучения на выборке Australian

6 Заключение

Одно из важнейших свойств ИНС – способность к обобщению полученных знаний. Главные причины, снижающие способность сети к обобщению, это а) значения

компактности обучающей выборки б) слишком большое количество скрытых нейронов; в) слишком малое количество скрытых нейронов.

Экспериментально доказана прямая зависимость между оценками компактности и обобщающей способностью нейронных сетей.

Литература

- [1] Baldi P., Vershynin R. The capacity of feedforward neural networks // *Neural Networks*, 2019. Vol. 116. P. 288–311.
- [2] Ismailov V. E. Approximation by neural networks with weights varying on a finite set of directions // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012. Vol. 389. Iss. 1. P. 72–83.
- [3] Chen Z., Cao F. The approximation operators with sigmoidal functions // *Computers and Mathematics with Applications*, 2009. Vol. 58. Iss. 4. P. 758–765.
- [4] Pinkus A. Approximation theory of the MLP model in neural networks // *Acta Numerica*, 1999. Vol. 8. P. 143–195.
- [5] Yamashita R., Nishio M., Do R.K., Togashi K. Convolutional neural networks: an overview and application in radiology // *Insights Imaging*, 2018. Vol. 9. P. 611–629.
- [6] Diamantopoulou M.J., Antonopoulos V.Z., Papamichail D.M. Cascade Correlation Artificial Neural Networks for Estimating Missing Monthly Values of Water Quality Parameters in Rivers // *Water Resources Management*, 2007. Vol. 21. Iss. 3. P. 649–662.
- [7] Zhang Q., Yang L.T., Chen Z., Li P. A survey on deep learning for big data // *Information Fusion*, 2018. Vol. 42. P. 146–157.
- [8] Liu W., Wang Z., Liu X., Zeng N., Liu Y., Alsaadi F.E. A survey of deep neural network architectures and their applications // *Neurocomputing*, 2017. Vol. 234. P. 11–26.
- [9] Chandra B., Sharma R.K. On improving recurrent neural network for image classification // 2017 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). — Anchorage, AK, 2017, P. 1904–1907.
- [10] Lu Y., Yang J., Wang Q., Huang Z. The upper bound of the minimal number of hidden neurons for the parity problem in binary neural networks // *Science China Information Sciences*, 2012. Vol. 55. Iss. 7. P. 1579–1587.
- [11] Huang S., Huang Y. Bounds on Number of Hidden Neurons of Multilayer Perceptrons in Classification and Recognition // *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. — New Orleans, LA, USA, May 1–3 1990, P. 2500–2503.
- [12] Tamura S. Capabilities of a Three-Layer Feedforward Neural Network // *IEEE International Joint Conference on Neural Networks*. — Singapore, Singapore, November 18–21 1991, P. 2757–2762.
- [13] Tamura S., Tateishi M. Capabilities of a Four-Layered Feedforward Neural Network: Four Layers Versus Three // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1997. Vol. 8. Iss.2, P. 251–255.
- [14] Huang G., Babri H.A. Upper Bounds on the Number of Hidden Neurons in Feedforward Networks with Arbitrary Bounded Nonlinear Activation Functions // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1998. Vol. 9. Iss.1, P. 224–229.
- [15] Huang G. Learning Capability and Storage Capacity of Two-Hidden-Layer Feedforward Networks // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2003. Vol. 14. Iss. 2, P. 274–281.
- [16] Teoh E.J., Xiang C., Tan K.C. Estimating the Number of Hidden Neurons in a Feedforward Network Using the Singular Value Decomposition // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006. Vol. 17. Iss. 6. P. 1623–1629.

- [17] *Psichogios D.C., Ungar L.H.* SVD-NET: An Algorithm that Automatically Selects Network Structure // IEEE Transactions on Neural Networks, 1994. Vol. 5. Iss. 3. P. 513-515.
- [18] *Santos J.D., Barreto G.D., Medeiros C.M.* Estimating the Number of Hidden Neurons of the MLP Using Singular Value Decomposition and Principal Components Analysis: A Novel Approach // 2010 Eleventh Brazilian Symposium on Neural Networks. — Sao Paulo, Brazil, October 23-28 2010, pp. 19-24.
- [19] *Jiang N., Zhang Z., Ma X., Wang J.* The Lower Bound on the Number of Hidden Neurons in Multi-Valued Multi-Threshold Neural Networks // 2008 Second International Symposium on Intelligent Information Technology Application. — Shanghai, China, January 06 2008, pp. 103-107.
- [20] *Kurkova V.* Kolmogorov's theorem is relevant // Neural Computation, 1991. Vol. 3. P. 617-622.
- [21] *Kurkova V.* Kolmogorov's theorem and multilayer neural networks // Neural Networks, 1992. Vol. 5. Iss. 3. P. 501-506.
- [22] *Maierov V., Pinkus A.* Lower bounds for approximation by MLP neural networks // Neurocomputing, 1999. Vol. 25. P. 81-91.
- [23] *Ismailov V.E.* On the approximation by neural networks with bounded number of neurons in hidden layers // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014. Vol. 417. Iss. 2. P. 963-969.
- [24] *Marakhimov A.R., Khudaybergenov K.K.* One approach to the synthesis of structure of neural networks in problems of classification // International Journal of Computing, 2020 (accepted, in press).
- [25] *Игнатъев Н.А.* Обобщающая способность алгоритмов по мере компактности // Вестник томского государственного университета, Управление, вычислительная техника и информатика, 2018. Т. 42. С. 37-47. doi: <http://dx.doi.org/10.17223/19988605/42/5>.

Поступила в редакцию 20.02.2018

UDC 519.95

IMPROVING THE GENERALIZING ABILITY OF NEURAL NETWORKS AND SELECTING TRAINING DATASET

Marakhimov A.R., Khudaybergenov K.K., Ignatev N.A.

a.marakhimov@nuu.uz, kabul85@mail.ru

National University of Uzbekistan named after M.Ulugbek,

4, University str., Tashkent 100174, Uzbekistan

Evaluating the number of hidden neurons necessary for solving of pattern recognition and classification tasks is one of the key problems in artificial neural networks. Multi-layer perceptron is the most useful artificial neural network to estimate the functional structure in classification. In this note, we show that artificial neural network with a two hidden layer feed forward neural network with d inputs, d neurons in the first hidden layer, $2d+2$ neurons in the second hidden layer, k outputs and with a sigmoidal infinitely differentiable function can solve classification and pattern problems with arbitrary accuracy. This result can be applied to design pattern recognition and classification models with optimal structure in the number of hidden neurons and hidden layers. A direct relationship between the compactness estimates and the generalizing ability of neural

networks is experimentally proved. It is experimentally proved that the minimum number of hidden layers, the number of neurons in hidden layers, and the removal of noise objects affect the indicators of the generalizing ability of neural networks.

Keywords: Neural networks, hidden layer, sigmoidal function, classification, noisy objects.

Citation: Marakhimov A.R., Khudaybergenov K.K., Ignatev N.A. 2020. Improving the generalizing ability of neural networks and selecting training dataset. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26):99–107.

References

- [1] Baldi P., Vershynin R. The capacity of feedforward neural networks // *Neural Networks*, 2019. Vol. 116. P. 288–311.
- [2] Ismailov V. E. Approximation by neural networks with weights varying on a finite set of directions // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012. Vol. 389. Iss. 1. P. 72–83.
- [3] Chen Z., Cao F. The approximation operators with sigmoidal functions // *Computers and Mathematics with Applications*, 2009. Vol. 58. Iss. 4. P. 758–765.
- [4] Pinkus A. Approximation theory of the MLP model in neural networks // *Acta Numerica*, 1999. Vol. 8. P. 143–195.
- [5] Yamashita R., Nishio M., Do R.K., Togashi K. Convolutional neural networks: an overview and application in radiology // *Insights Imaging*, 2018. Vol. 9. P. 611–629.
- [6] Diamantopoulou M.J., Antonopoulos V.Z., Papamichail D.M. Cascade Correlation Artificial Neural Networks for Estimating Missing Monthly Values of Water Quality Parameters in Rivers // *Water Resources Management*, 2007. Vol. 21. Iss. 3. P. 649–662.
- [7] Zhang Q., Yang L.T., Chen Z., Li P. A survey on deep learning for big data // *Information Fusion*, 2018. Vol. 42. P. 146–157.
- [8] Liu W., Wang Z., Liu X., Zeng N., Liu Y., Alsaadi F.E. A survey of deep neural network architectures and their applications // *Neurocomputing*, 2017. Vol. 234. P. 11–26.
- [9] Chandra B., Sharma R.K. On improving recurrent neural network for image classification // *2017 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*. — Anchorage, AK, 2017, P. 1904–1907.
- [10] Lu Y., Yang J., Wang Q., Huang Z. The upper bound of the minimal number of hidden neurons for the parity problem in binary neural networks // *Science China Information Sciences*, 2012. Vol. 55. Iss. 7. P. 1579–1587.
- [11] Huang S., Huang Y. Bounds on Number of Hidden Neurons of Multilayer Perceptrons in Classification and Recognition // *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. — New Orleans, LA, USA, May 1–3 1990, P. 2500–2503.
- [12] Tamura S. Capabilities of a Three-Layer Feedforward Neural Network // *IEEE International Joint Conference on Neural Networks*. — Singapore, Singapore, November 18–21 1991, P. 2757–2762.
- [13] Tamura S., Tateishi M. Capabilities of a Four-Layered Feedforward Neural Network: Four Layers Versus Three // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1997. Vol. 8. Iss.2, P. 251–255.
- [14] Huang G., Babri H.A. Upper Bounds on the Number of Hidden Neurons in Feedforward Networks with Arbitrary Bounded Nonlinear Activation Functions // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1998. Vol. 9. Iss.1, P. 224–229.

- [15] Huang G. Learning Capability and Storage Capacity of Two-Hidden-Layer Feedforward Networks // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2003. Vol. 14. Iss. 2, P. 274–281.
- [16] Teoh E.J., Xiang C., Tan K.C. Estimating the Number of Hidden Neurons in a Feedforward Network Using the Singular Value Decomposition // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006. Vol. 17. Iss. 6. P. 1623–1629.
- [17] Psichogios D.C., Ungar L.H. SVD-NET: An Algorithm that Automatically Selects Network Structure // *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1994. Vol. 5. Iss. 3. P. 513–515.
- [18] Santos J.D., Barreto G.D., Medeiros C.M. Estimating the Number of Hidden Neurons of the MLP Using Singular Value Decomposition and Principal Components Analysis: A Novel Approach // *2010 Eleventh Brazilian Symposium on Neural Networks*. — Sao Paulo, Brazil, October 23–28 2010, pp. 19–24.
- [19] Jiang N., Zhang Z., Ma X., Wang J. The Lower Bound on the Number of Hidden Neurons in Multi-Valued Multi-Threshold Neural Networks // *2008 Second International Symposium on Intelligent Information Technology Application*. — Shanghai, China, January 06 2008, pp. 103–107.
- [20] Kurkova V. Kolmogorov’s theorem is relevant // *Neural Computation*, 1991. Vol. 3. P. 617–622.
- [21] Kurkova V. Kolmogorov’s theorem and multilayer neural networks // *Neural Networks*, 1992. Vol. 5. Iss. 3. P. 501–506.
- [22] Maierov V., Pinkus A. Lower bounds for approximation by MLP neural networks // *Neurocomputing*, 1999. Vol. 25. P. 81–91.
- [23] Ismailov V.E. On the approximation by neural networks with bounded number of neurons in hidden layers // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014. Vol. 417. Iss. 2. P. 963–969.
- [24] Marakhimov A.R., Khudaybergenov K.K. One approach to the synthesis of structure of neural networks in problems of classification // *International Journal of Computing*, 2020 (accepted, in press).
- [25] Ignatiev N.A. The generalizing ability of algorithms by the measure of compactness. // *Vestnik tomskogo gosudarstvennogo universiteta, Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Toms State University Bulletin, Management, Computing and Informatics] (In russian), 2018. Vol. 42. P. 37–47. doi: <http://dx.doi.org/10.17223/19988605/42/5>.

Received February 20, 2018

УДК 681.3

КЛАССИФИКАЦИЯ КОНТЕНТА ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Мухамедиева Д.Т., Жураев З.

dilnoz134@rambler.ru

Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий,
100124, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улугбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А.

Описаны методы классификации контента произведений в рамках двух основных направлений: формализованного и эвристического. В рамках эвристического подхода выделены направления анализа с известными априори категориями на основе использования теории нечетких множеств. Проведенная систематизация демонстрирует альтернативы для решения типовых задач интеллектуального анализа, а также предлагает возможные стратегии алгоритмизации в рамках каждого из подходов. Разработан, обоснован и апробирован алгоритм тематической классификации произведений средневековых учёных в рамках стратегии смешивания методов. Алгоритм включает поэтапное применение формализованных и эвристических методов тематической классификации текста.

Ключевые слова: классификация, теория нечетких множеств, контент, поиск слов.

Цитирование: Мухамедиева Д.Т., Жураев З. Классификация контента произведений // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 108–117.

1 Введение

Распространение технологий обработки информации в текстовом виде, а также повышение роли информации как ресурса и основы принятия решений обусловили запрос на разработку автоматизированных средств классификации и анализа текстовых данных [1-2]. Методы анализа данных развиваются чаще в технических дисциплинах, таких как искусственный интеллект, нейросетевое моделирование, лингвистическое обеспечение систем автоматизированного проектирования [3-5]. Подавляющее большинство современных гуманитарных исследований, содержащих этап обработки текстовой информации продолжают использовать традиционные методы анализа, основанные на эвристических алгоритмах [6-7]. Работа, направленная на изучение специфики и ограничений методов формализованного анализа текстовых данных и разработку стратегий их интеграции с эвристическими методами является актуальной [8-10]. Конечно, в Узбекистане создано много Интернет-ресурсов. Можно приводить примеры: ziyonet.uz, archiv.uz, aim.uz, idum.uz, saviya.uz, Islam.uz. Однако, нет платформы который посвящен научно-практическому анализу произведений средневековых учёных Узбекистана. Для решения выше указанных проблем надо создать платформу виде «Умной библиотеки». «Умная библиотека» должна хранить ресурсы такие как хадис, калам, молитва и правоведение. На этой платформе студенты смогут получить первоначальную информацию об истории ислама, концепциях Корана и хадисов, суфийских путей, акида, калама, принципах исламской юриспруденции и религиозной толерантность в исламе, а также исламской религии. Одним из основных показателей «Умной библиотеки» является формирование интеллектуальной поисковой системы и классификация контента произведений средневековых учёных.

2 Постановка задачи

Классификация контента произведений средневековых учёных должна обеспечивать следующие возможности:

- Чтение сведения обо всех учёных из умной библиотеки.
- Классификация контента по темам.
- Классификация контента по направлениям учёного.
- Возможность определения какой контент принадлежит ученому (название контента, имя учёного).
- Определение направлений учёного (название направлений, имя учёного).
- Формирование по каждому контенту свой словарь (название контента, термин, комментарий термина).
- Для быстрого поиска создание базы знаний ключевых слов контента (ключевые слова, вес слов, имя контента).

Важно отметить, что классификация обычно применяется не ко всем текстам, а только к фрагментам текстов, описанными их «представителями» (конкретные слова).

Во-вторых, классификация не является самоцелью. Это первый шаг в сложном познавательном процессе компьютерной интерпретации текста. Конкретно это означает, что текст для классификация контента произведений должна быть связана с динамическим процессом интерпретации текста и, следовательно, должна быть цениться в соответствии с этой целью.

Тематический анализ состоит следующих этапов:

1) Подготовка текста. Текстовые классификаторы должны определять два различных типа объектов: фрагменты текста и единицы текстовой информации. Единицы информации могут быть словами или n-граммами (цепочка из n символов).

2) Преобразование текста в векторное представление. Эта процедура требует, чтобы каждый вектор представлял сегмент и описывал его единицы информации (слова, n-граммы и т. д.). Из этих векторов строится матрица. На этой текстовой матрице определяется ядро операции классификации.

3) Создание классификатора. Наиболее распространенными являются статистически ориентированный классификаторы (кластеризаторы, корреляторы, факторный анализ и анализ главных компонент). Кроме того, имеются вероятностные методы, такие как байесовская классификация, ближайший сосед, классификаторы на основе нейронных сетей, генетический алгоритм. Все эти математические модели были применены для обработки текстовой информации.

3 Решение задач классификации контента произведений средневековых учёных

Решение задач оценки и классификации состояния сложных систем можно рассматривать как классификационные задачи в которых объект исследования, на основании анализа совокупности признаков относится к тому или иному классу из их фиксированного набора [9-12].

Часто решение классификационных задачи литературных произведений значительно затрудняется разнородностью анализируемых признаков, сложной структурой классов, которые могут иметь значительные области пересечения с нечетко определяемыми границами, недостаточностью исходных данных и т.д. Проведенные ис-

следования показали, что в таких условиях хорошо зарекомендовала себя технология мягких вычислений, включающая в себя аппарат нечеткой логики и принятия решений [5-7].

Одной из основных проблем практического применения этого математического аппарата является сложность выбора формы и параметров элементов нечетких решающих правил и способов их агрегации в системы гибридных нечетких решающих правил. Значительная часть этих проблем может быть решена путем использования кластеров нечетких решающих правил, обучение которых осуществляется при использовании данных разведочного анализа [13].

Кластеры нечетких решающих правил хорошо зарекомендовали себя в условиях, когда для различных групп информативных признаков, участвующих в решении выбранной задачи наиболее подходящими (в смысле минимума ошибки классификации) являются различные типы нечетких решающих правил. Кроме того, в пространстве всех информативных признаков для различных его гиперобластей, так же, целесообразно использовать различные классификационные правила.

Практика использования математических методов в задачах классификации состояний сложных систем показала, что в условиях плохой формализации при недостаточной статистике и выборе типов решающих правил, объединяемых в их кластеры, наиболее целесообразно использовать нечеткую логику принятия решений, диалоговые системы распознавания образов, метод группового учета аргументов и теорию измерения латентных переменных [14-15].

При использовании модификаций классического аппарата нечеткой логики принятия решений Л.Заде, ориентированной на решение классификационных задач в качестве базовых элементов используются функции принадлежности $\mu_{\omega_l}(x_i)$ и (или) $\mu_{\omega_l}(Y_j)$ к исследуемым классам состояний μ_{ω_l} с базовыми переменными, определяемыми по шкалам информативных признаков x_i , и (или) комплексных показателей Y_j , вычисляемых по информативным показателям $Y_j = f_j(x_1, x_2, \dots)$, где f_j функциональная зависимость, «связывающая» все или часть информативных признаков с Y_j [13].

Наиболее популярными формулами агрегации при использовании функций принадлежности являются выражения вида:

$$UGN_l = \min_i [\mu_{\omega_l}(x_i)], \quad UGN_l = \min_j [\mu_{\omega_l}(Y_j)], \quad UGN_l = \min_{ij} [\mu_{\omega_l}(x_i), \mu_{\omega_l}(Y_j)], \quad (1)$$

$$UGN_l = \max_i [\mu_{\omega_l}(x_i)], \quad UGN_l = \min_j [\mu_{\omega_l}(Y_j)], \quad UGN_l = \min_{ij} [\mu_{\omega_l}(x_i), \mu_{\omega_l}(Y_j)], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} UGN_l &= \max_q \min_i [\mu_{\omega_l q}(x_i)], \quad UGN_l = \max_q \min_{ij} [\mu_{\omega_l iq}(Y_j)], \\ UGN_l &= \max_q \min_{ij} [\mu_{\omega_l iq}(Y_j)], \end{aligned} \quad (3)$$

где q - номер эталонных гиперобъемов, «покрывающих» класс ω_l .

Выражения типа (1) следует применять, если в подпространстве или пространстве признаков все признаки таковы, что отсутствие одного из них требует отказа от ω_l . Эти правила с геометрической точки зрения можно трактовать как классификацию по попаданию исследуемого объекта в нечеткий гиперпараллелепипед, ограниченный ненулевыми значениями всех используемых функций принадлежности.

Выражение (2) целесообразно использовать, если наличие любого из признаков достаточно для оценки гипотезы μ_{ω_l} .

Если в пространстве признаков находятся группы признаков, удовлетворяющих (1) и (2), то рекомендуется использовать правила вида (3). Порядок синтеза решающих правил типа (1), (2) и (3) достаточно подробно описан в работах [11-14].

Геометрически это правило соответствует аппроксимации геометрических образов, соответствующих исследуемым классам состояний наборами нечетких гиперпараллелепипедов с номерами q в классе ω_ℓ .

Часто в ходе разведочного анализа устанавливается тот факт, что между анализируемыми классами состояний возможно проведение линейных, кусочно-линейных или нелинейных разделяющих плоскостей вида:

$$Z_l = F_l(A_{li}, x_i).$$

В этих условиях предлагается использовать решающие правила вида:

$$UGG_l = \mu_{\omega_l}[D_l(Z_l)], \quad (4)$$

где F_l - функция, определяющая вид разделяющей поверхности Z_l , (линейная, кусочно-линейная, квадратичная и т.д.); $D_l(Z_l)$ - функция расстояния от исследуемых объектов до разделяющей поверхности Z_l [13,17].

В рамках теории уверенности рассматривается вариант нечеткой классификации, при которой информативные признаки x_i или комплексные показатели Y_j характеризуются такими свойствами, что каждый из них увеличивает уверенность в гипотезе ω_ℓ [13-15]. Частную и (или) общую уверенность UGS_l в ω_ℓ рекомендуется определять по формулам:

$$UGS_l(p+1) = UGS_l(p) + \mu_{\omega_l}(x_i)[1 - UGS_l(p)],$$

или

$$UGS_l(p+1) = UGS_l(p) + \mu_{\omega_l}(Y_j)[1 - UGS_l(p)], \quad (5)$$

или

$$UGS_l(p+1) = UGS_l(p) + UGS_l(p+1) \cdot [1 - UGS_l(p)],$$

где p - номер итерации в расчете UGS_l ; $UGS_l(p+1)$ - частная уверенность в ω_ℓ по подпространству с номером $(p+1)$ многомерного пространства признаков [16].

Если в ходе разведочного анализа, активно использующего различные методы отображения многомерных данных в двумерные отображающие пространства, выясняется удовлетворительное качество классификации в этом пространстве, то целесообразно остановиться на методе диалогового конструирования двумерных классификационных пространств [17].

В соответствии с этим методом двумерное отображающее пространство $\Phi = Y_1 \cdot Y_2$ определяется как декартово произведение двух отображающих функций вида:

$$Y_1 = \varphi_1(A, X) \text{ и } Y_2 = \varphi_2(B, X), \quad (6)$$

где φ_1 и φ_2 - функции отображения многомерных объектов в двумерное пространство Φ ; A и B - вектора настраиваемых параметров; $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ - вектора объектов многомерного пространства информативных признаков.

На объектах обучающей выборки в пространстве Φ в полуавтоматическом режиме, с привлечением экспертов предметной области формируются границы разделения альтернативных классов ω_ℓ и ω_r из условия минимального количества ошибок классификации в виде уравнения $\omega_{lr} = F_{lr}(Y_1, Y_2)$.

При переходе к нечеткой классификации в двумерном отображающем пространстве четкий вывод метода диалогового конструирования двумерных классификационных пространств трансформируется в нечеткое решение путем определения функций принадлежности $\mu_{\omega_l} D_l$ к классу ω_l с базовой переменной, определяемой как расстояние D_l от отображения в Φ исследуемого объекта до двумерных границ класса ω_l , описываемых уравнением вида $\omega_l = F_l(Y_1, Y_2)$.

Уверенность в ω_l полученную при диалоговом конструировании двумерных классификационных пространств определим соотношением:

$$UGD_l = \mu_{\omega_l} D_l. \quad (7)$$

Метод группового учета аргументов характеризуется использованием моделей структурно параметрической идентификации:

$$z_{i1} = A_{i1,0,\omega_l} + \sum_{i=1}^{nr} (A_{i1,i,\omega_l} \cdot \prod_{j=1}^{mr} z_j^{p_{i1,i,j,\omega_l}}), \quad (8)$$

где z_{i1} - переменная (из множеств X или Y); $A_{i1,0,\omega_l}$ - свободный член для модели отклика z_{i1} в классе ω_l , ($\ell = 0, 1$) на множестве X или Y ; A_{i1,i,ω_l} - весовой коэффициент слагаемого i для отклика функции z_{i1} в классе ω_l , ($\ell = 0, 1$) на множестве X или Y ; $p_{i1,i,j}$ - степень аргумента j в терме с номером i для функции отклика z_{i1} в классе ω_l , ($\ell = 0, 1$) на множествах X или Y nr - количество рядов селекции (термов полинома); mr - количество переменных z .

В ходе процесса обучения для каждого из исследуемых классов состояний ω_l , в пространстве информативных признаков с использованием обучающих алгоритмов метода группового учета аргументов получают наборы моделей взаимосвязей между различными информативными признаками, эти модели являются частыми случаями моделей (8):

$$X_{j\ell} = F_{jl}(\overline{X_{kl}}, \overline{A_{kl}}), \quad (9)$$

где $X_{j\ell}$ - признак с номером j рассчитанный по объектам обучающей выборки класса ω_l ; $\overline{X_{kl}}$ - вектор группы признаков, причем признак с номером j не входит в группу k ; F_{jl} - функция связи $X_{j\ell}$ с $\overline{X_{kl}}$; $\overline{A_{kl}}$ - вектор настраиваемых параметров.

Таким образом, каждый из исследуемых классов состояний представлен «своими» наборами моделей типа (9).

Математические модели типа (9) представляют собой приближенное описание исследуемых классов состояний ω_l поэтому они характеризуются некоторой мерой доверия к ним, которые могут быть определены коэффициентом дискриминации R_{lr}^2 . В соответствии с рекомендациями [17] мера доверия к моделям каждого альтернативного класса в этом случае определяется выражением: $MDM_{lr} = R_{lr}^2$, где r номер модели (9) в классе ω_l .

Учитывая, что каждый из исследуемых классов представляется несколькими моделями, мера доверия к моделям для класса ω_l определяется функцией:

$$MDM_l = 1 - \prod_{lr=1}^{Lr} (1 - MDM_{lr}).$$

По всем исследуемым классам состояний мера доверия по всем моделям (9) определяется выражением:

$$MDM = \frac{\sum_{l=1}^L (\gamma_l \cdot MDM_l)}{\sum_{l=1}^L \gamma_l}, \quad (10)$$

где lr - количество уравнений (9) в классе l ; L — количество анализируемых классов состояний; γ_l - весовые коэффициенты, позволяющие учитывать «желаемые» доли для ошибок первого и второго рода по каждому из классов ω_l .

Для нечеткого представления исследуемых классов состояний вводится функция принадлежности $\mu_{lr}(D_{lr})$ к классу ω_l с базовой переменной D_{lr} , определяемой как расстояние от точки многомерного пространства до модели с номером l класса ω_l .

Таким образом, при нечеткой интерпретации метода группового учета аргументов дополнительно к моделям (9) в процессе обучения, пользуясь, например, рекомендациями [13,17] синтезируется набор соответствующих функций принадлежности μ_{lr}, D_{lr} .

Уверенность в классификации при использовании нечеткого метода группового учета аргументов определяется выражением:

$$UGM_l^* = \frac{1}{L_r} \sum_{r=1}^{L_r} \mu_{lr}(D_{lr}). \quad (11)$$

С учетом (10) уверенность в принадлежности текста к классу определяется выражением:

$$UGM_l = \max[0, (UGM_l^* - MDM)]. \quad (12)$$

Исходными данными для теории измерения латентных переменных является положение о том, что информативные признаки, с помощью которых оценивается состояние исследуемых систем, получают путем прямого измерения либо вычисляют по результатам прямых измерений. Результат классификации литературных произведений определяется не прямыми измерениями, а в ходе анализа исходных признаков и (или) комбинированных показателей получаемых расчетным путем [17]. Это позволяет сделать вывод о том, что теория латентных переменных является адекватной по отношению к решаемому классу задач.

В терминологии теории измерения латентных переменных исходные признаки и четко вычисляемые параметры определяются как индикаторные переменные, а неопределенные априори результаты - как латентные (скрытые) переменные.

Многочисленные исследования отечественных зарубежных ученых показали, что для решения задач аналогичных решаемым в работе наиболее адекватной является модель, определяемая логистической функцией вида:

$$P_{ij} = \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}, \quad (13)$$

где P_{ij} - вероятность достижения реализуемой цели (правильные прогноз или классификация) у объекта (состояния системы) с номером i при использовании индикаторных переменных S_{ij} ; θ_i - эффективность достижения цели у объекта с номером i ; β_j -информативность (эффективность) использования j -го признака (воздействия) при решении поставленной задачи. Как следует из определения θ_i и β_j - по своей природе являются латентными переменными.

Все латентные переменные формируются при переходе от количественных шкал x_i , к качественным интервальным шкалам K_i .

Для перевода непрерывных шкал x_i ($i = 1, n$) к K_i используется формула:

$$K_i = \begin{cases} \text{int}(\frac{X_i - X_{i,\min}}{R_{n-1}}) & X_i < X_{i,\max}, \\ n - 1, & X_i < X_{i,\min}, \end{cases} \quad (14)$$

где X_i - текущее натуральное знамение i -го индикатора;

$X_{i,\min}$ - наименьшее значение i -го индикатора;

$X_{i,\max}$ - наибольшее значение i -го индикатора;

m - основание качественной шкалы (2, 3, ...);

$\text{int}(M)$ - целая часть числа M .

При этом длина интервала качественной шкалы определяется по формуле:

$$R_i = \frac{x_{i,\max} - x_{i,\min}}{m}.$$

Предусмотрена возможность определения функциональной связи между латентной переменной L в выбранным набором индикаторных переменных S_j :

$$L = f_L(S_j), \quad (15)$$

где f_L - вид функциональной зависимости L от S_j .

При оценке состояния сложных систем в качестве латентной переменной могут выступать уверенность в том, что система находится в одном из классов состояний ω_l ; уверенность в эффективности выбранной схемы управления и т.д.

При переходе к принятым в работе механизмам нечеткой классификации целесообразно использовать функции принадлежности к исследуемым классам состояний.

Для перехода от L к $\mu_{\omega_l}(L)$ удобно использовать такую обобщенную характеристику, как гистограмма распределения объектов исследования на шкале латентной переменной L . При этом функции $\mu_{\omega_l}(L)$ удобно строить используя рекомендации работ [17-19].

Таким образом, модель может быть использована для нечеткой классификации литературных произведений с расчетом уверенности в классификации в соответствии с выражением:

$$UGR_l = \mu_{\omega_l}(L). \quad (16)$$

Если на экспертном уровне и в ходе разведочного анализа выясняется возможность формирования признакового пространства или подпространства, где каждый из признаков x_i представим системой k градаций x_{ik} и существует возможность произвести статистический расчёт частностей появления k -ой градации i -го признаков альтернативных классов ω_l и ω_r - $P(x_{ik}/\omega_l)$, $P(x_{ik}/\omega_r)$, то изучается целесообразность использования секвенциальной последовательной процедуры А.Вальда с расчетом диагностического коэффициента по формуле:

$$DK = \sum_{i=1}^n 10 \lg \frac{P(x_{ik}/\omega_l)}{P(x_{ik}/\omega_r)},$$

где ω_l и ω_r - пара альтернативных диагностических классов (диагнозов); x_{ik} - значение k -ой градации информативного признака x_i ($i = 1, n$); n - размерность пространства признаков; $P(x_{ik}/\omega_l)$ - частность появления k -ой градации i -го признака в классе ω_l ; $P(x_{ik}/\omega_r)$ - в классе ω_r .

При переходе к нечёткому Вальдовскому классификатору уверенность в классификации $\omega_l - UGV_l$ определяется функцией принадлежности к базовой переменной [13].

То есть:

$$UGV_l = \mu_{\omega_l}(DK). \quad (17)$$

Преимуществами этой процедуры являются простота вычислений, отсутствие определённых требований к распределению величин и возможность постановки классификации с заранее установленным уровнем надежности, даже при отсутствии некоторой части измерений. Ограничения применения этого метода сводится к требованию по объему обучающей выборки и её репрезентативности, наличию зоны неопределённых решений, которая при значениях p приближающихся к единице (высокое значение качества классификации) может быть достаточно широкой и к независимости признаков, участвующих в классификации литературных произведений. Однако, даже при весьма выраженной зависимости признаков, число ошибок при последовательной классификационной процедуре оказывается, как правило, не выше расчетного.

В другом варианте все информативные признаки обрабатываются каждым из правил, входящих в коллектив. Возможен смешанный вариант, при котором различные решающие правила используют смешанные, возможно пересекающихся, группы информативных признаков. Такие группировки могут создаваться по различному принципу: по стоимости получения информации; по времени измерения; по информативности; по особенности структуры данных и т.д.

При объединении частных решающих правил в их коллективы возможен вариант, что эти нечеткие правила обрабатывают «свои» группы признаков.

Варианты финальной агрегации решающих правил так же могут быть различны.

При осторожной стратегии, когда решение должно приниматься при обязательном учете «мнения» всех участников коллектива, с учетом возможных «сомнений» в направлении альтернативы (к классу ω_r) целесообразно использовать агрегатор типа:

$$UG_l = \min(UGV_l, UGD_l, UGN_l, UGG_l, UGS_l, UGR_l). \quad (18)$$

Если ставится задача «не пропустить» объекты класса, или если степень доверия к каждому из решающих правил примерно одинакова целесообразно проверить применимость (качество работы) решающего правила типа:

$$UG_l = \max(UGV_l, UGD_l, UGN_l, UGG_l, UGS_l, UGR_l). \quad (19)$$

Если использование каждого из правил добавляет уверенность в принятие решений относительно гипотезы ω_l , то целесообразно использовать итерационные накопительные процедуры:

$$UG_l(s+1) = UG_l(s) + UGF_l(s+1) \cdot [1 - UG_l(s)], \quad (20)$$

где s – номер итерации в расчете уверенности UG_l в классификации ω_l ;

$$UGF_l = \max(UGV_l, UGD_l, UGN_l, UGG_l, UGS_l, UGB_l), UG(l). \quad (21)$$

На практике встречаются задачи со сложной структурой данных, когда в финальном решающем правиле целесообразно комбинировать варианты агрегации по правилам (18), (19), (20).

4 Заключение

Классификация и анализ текстов остается субъективным процессом. Обнаружение семантического содержания текста - это всегда сложный познавательный процесс, который ориентируясь на личные читательские интересы. Для каждого читателя и в основном в литературном тексте, есть личный трактовочный путь. Тем

не менее, использование таких методов классификации дает некоторую «объективную» ориентацию на анализ. Это не навязывает читателю какую-либо стратегию, но предлагает ему множество возможных путей. Одним из возможных способов оценки качества компьютерной тематической классификации было бы сравнить его с различными лучшими тестами.

Литература

- [1] *Turney P.* Thumbs up or thumbs down?: semantic orientation applied to unsupervised classification of reviews. In Proceedings of Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, ACL. 2002. P. 417-424.
- [2] *Jurafsky D., Martin J.* Speech and natural language processing: An introduction to natural language processing, computational linguistics, and speech recognition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 2009.
- [3] *Manning C., Raghavan P., Schütze H.* Introduction to information retrieval. Cambridge, UK: Cambridge University Press. 2008.
- [4] *Blei D., Ng A., Jordan M.* Latent Dirichlet Allocation // Journal of Machine Learning Research. 2003. Vol. 3. P. 993–1022.
- [5] *Daud A., Li J., Zhou L., Muhammad F.* Knowledge discovery through directed probabilistic topic models: a survey // Journal of Frontiers of Computer Science in China (FCS). 2010. Vol. 4, № 2. P. 280-301
- [6] *Narayanan R, Liu B. and Choudhary A.* Sentiment Analysis of Conditional Sentences Proceedings of the Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing. 2009. P. 180–189.
- [7] *Jurka T., Collingwood L., Boydston A., Grossman A., Atteveldt. R* Text Tools: Automatic text classification via supervised learning. URL: <http://cran.r-project.org/web/packages/RTextTools/index.html> (дата обращения 29.05.2014).
- [8] *Fabrizio S.* Machine Learning in Automated Text Categorization. ACM Computing Surveys, Vol. 34, No. 1 pages 1–47, 2002.
- [9] *Christopher D. Manning, Prabhakar Raghavan, Hinrich Schütze.* – 2008. Introduction to Information Retrieval.
- [10] *Grimmer J.* Text as Data: The Promise and Pitfalls of Automatic Content Analysis Methods for Political Texts (with Brandon Stewart) Political Analysis, 2013. Vol. 21. No 3. P. 267–297.
- [11] *Benderskaya E.N., Zhukova S.V.* Multidisciplinary trends in modern artificial intelligence: Turing's way // Studies in Computational Intelligence. Springer, 2013. Vol. 427. Pp. 319–343.
- [12] *Benderskaya E.N., Zhukova S.V.* Dynamic data mining: synergy of bio-inspired clustering methods // Knowledge-Oriented Applications in Data Mining. InTech, 2011. Pp. 398–410.
- [13] *Lin Hong.* Architectural Design of Multi-Agent Systems // Technologies and Techniques (Premier Reference Series) / Hong Lin. – IGI Global, 2007. – 421 p.
- [14] *Zadeh L.* The Information principle // In Proc. the 15th IEEE International Conference on Information Reuse and Integration, San Francisco, CA, USA; August 13-15, 2014.
- [15] *Bordini Rafael H.* Multi-Agent Programming : Languages, Platforms and Applications // Rafael H. Bordini, Mehdi Dastani, Jurgen Dix, Amal El Fallah Seghrouchni. – Springer, 2005. – 296 p.
- [16] *Hong Huang., Zhengxiong Zhang.* Research Status and Prospect of Vehicle Routing Problem // Logistics technology, 2010 V 10 227 pp. 21-24.
- [17] *Shamma Jeff.* Cooperative Control of Distributed Multi-Agent Systems. – John Wiley Sons, 2008. – 437 p.

- [18] *Alain Fougieres*. A Modelling Approach Based on Fuzzy Agents // International Journal of Computer Science Issues, November, 2012.
- [19] *Бендерская Е.Н.* Перспективные концепции разработки интеллектуальных систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2011.
- [20] *Джонс М.Т.* Программирование искусственного интеллекта в приложениях // Пер. с англ. М.: ДМК Пресс, 2004. 312 с.

Поступила в редакцию 20.01.2020

UDC 681.3

CLASSIFICATION OF CONTENT OF WORKS

Mukhamedieva D.K., Jurayev Z.

dilnoz134@rambler.ru

Scientific-innovative center of information and communication technologies,
100124, 17A Buz-2, Mirzo-Ulugbek district, Tashkent, Uzbekistan.

Methods for classifying the content of works are described in two main areas: formalized and heuristic. Within the framework of the heuristic approach, analysis directions with a priori categories are known based on the use of the theory of fuzzy sets. The systematization performed demonstrates alternatives for solving typical problems of intellectual analysis, and also offers possible algorithmic strategies within the framework of each approach. An algorithm for thematic classification of a work of medieval scholars was developed, justified and tested as part of a strategy for mixing methods. The algorithm includes the phased application of formalized and heuristic methods for thematic classification of the text.

Keywords: classification, fuzzy set theory, content, word search.

Citation: Mukhamedieva D.K., Jurayev Z. 2020. Classification of content of works. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26): 108–117.

UDC 519.6

INVESTIGATION PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A NONLINEAR SYSTEM OF EQUATIONS WITH NONHOMOGENEOUS DENSITY AND SOURCE

¹Sadullaeva Sh. A., ²Khaydarov A. T., ¹Fayzullayeva Z.

orif_sh@list.ru; haydarovabdu@rambler.ru; nigor1802@mail.ru

¹Tashkent University of Information Technology,
108, Amir Temur ave., Tashkent 100084, Uzbekistan;

²National University of Uzbekistan named after M.Ulugbek,
4, University str., Tashkent 100174, Uzbekistan

In this work the properties of the solution of self-similar and approximately self-similar solutions of equations for a reaction-diffusion system with double nonlinearity are investigated. The influence of the parameters of the reaction-diffusion system in the evolution process is investigated. Existence of parameter values for which the equation has a finite solution is proven. The system of equations considered in this work is based on many physical processes, for example, this system describes the reaction-diffusion process, thermal conductivity, polytrophic filtering of gas and liquid in a nonlinear medium with a source. A special property of this equation is its degeneration. And therefore, we investigated a weak solution, since in this case the solution to the problem may not exist in the classical sense. The main method for studying the problem under consideration is self-similar and approximately self-similar approaches. These approaches are intensively used to study the properties of solutions with a finite perturbation rate, the properties of solutions with exacerbation, and localization of solutions. For this, we used the nonlinear splitting method to construct a system of self-similar equations.

Keywords: parabolic equation, asymptotic, finite speed, approximation, self-similar, reaction-diffusion, system, numerical solution.

Citation: Sadullaeva Sh. A., Khaydarov A. T., Fayzullayeva Z. 2020. Investigation properties of solutions of a nonlinear system of equations with nonhomogeneous density and source. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26):118–132.

1 Introduction

Nonlinear problems are a very difficult to study. Analytical methods already here, as a rule, do not work. In this situation, it is necessary to rely only on numerical methods. Meanwhile, mathematical models generated by modern problems of science and technology are usually non-linear. This circumstance is also the reason that the computational experiment is now becoming almost the only means of conducting theoretical research in applied problems. But before proceeding with the numerical solution of nonlinear problems, it is necessary to study the qualitative properties of various solutions depending on the nonlinear parameters of the problems under consideration.

Let us consider the following degenerate double nonlinear parabolic problem with an nonhomogeneous density in the domain $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho(x)u)}{\partial t} = \operatorname{div}(|x|^n u^{m_1-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \rho(x) \gamma(t) u^{q_1} v^{r_1} \\ \frac{\partial(\rho(x)u)}{\partial t} = \operatorname{div}(|x|^n u^{m_2-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \rho(x) \gamma(t) u^{q_2} v^{r_2} \end{cases} \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0 \quad (2)$$

$$v(0, x) = v_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N$$

where, $m_1, m_2, n \in R$, $q_1, q_2, r_1, r_2 \geq 1$, $p \geq 2$ - preset numerical parameters $\nabla(\cdot) - \text{grad}(\cdot)$, $u_0(x)$, $v_0(x)$ $x \in R^N$ non-identical zero $\rho(x) = |x|^l$, $0 < \gamma(t) \in C(0, \infty)$.

One of the methods is proposed for constructing the self-similar equation of system (1) and to study the asymptotic property of the final solution and the free boundary ($m_i + p - 3 > 0$, $m_i + p - 3 = 0$, $i = 1, 2$), the asymptotic behavior of the self-similar solution for the fast diffusion case ($m_i + p - 3 < 0$, $i = 1, 2$). We show that the coefficient of the main term of the asymptotic solution is satisfied in some system of nonlinear algebraic equations.

We will consider the properties of the reaction-diffusion system with double nonlinearity, with variable density, and numerically study the reaction-diffusion system with double nonlinearity.

System (1) describes many physical processes, for instance, the process of mutual reaction-diffusion, thermal conductivity, polytropic filtration of liquid and gas in a nonlinear medium in the presence of a source, whose power is equal to $\rho(x)\gamma(t)u^{q_1}v^{r_1}$, $\rho(x)\gamma(t)u^{q_2}v^{r_2}$. Since system (1) is degenerate in the region $u = v = 0$, it may not have a classical solution in the region of degeneracy. Therefore, we will investigate the generalized solutions of system (1) that have physical meaning and satisfy a certain integral identity and have the following properties: $0 \leq u, v \in C(Q)$ and $|x|^n u^{m_1-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u, |x|^n v^{m_2-1} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \in C(Q)$. For generalized solutions of system (1) the presence of a phenomenon of a finite propagation velocity of disturbances is inherent, i.e. there are such continuous functions $l_1(t)$, $l_2(t)$ in which, $u(t, x) \equiv 0$ and $v(t, x) \equiv 0$ as $|x| \geq l_1(t)$ and $|x| \geq l_2(t)$, respectively. The surfaces $|x| = l_1(t)$ and $|x| = l_2(t)$ are called the free boundary or front.

In [1] is studied the solution for a system of reaction-diffusion equations with double nonlinearity in the presence of a source. A self-similar approach is used for the treatment of qualitative properties of a nonlinear reaction diffusion system. It is shown that there exist some parameter values for which the effect of finite velocity of perturbation of distribution (FSPD), localization of solution, onside localization can occur. In the paper [2] the properties of the weak solution of problem Cauchy for one parabolic equation with double nonlinearity and with lower members are investigated. The researched equation is best combination of forms of the equation of nonlinear diffusion, fast diffusion, the equation to very fast diffusion and p-Laplace heat conductivity equation by action of convective transfer the velocity of which depend from time. In [3] the Cauchy problem for nonlinear systems is considered. The conditions of existence of the solutions on time for the problem Cauchy are given.

Moreover the properties of the finite velocity of a propagation and localization of the disturbance, an asymptotic of self-similar solutions will be defined. The results of numerical solutions will be carried out and on the basis of calculations some necessary statements will be given. In the paper [4] is demonstrated the possibilities of the self-similar and approximately self-similar approaches for studying solutions of a nonlinear mutual reaction-diffusion system. The asymptotic behavior of compactly supported solutions and free boundary is studied. Based on established qualitative properties of solutions numerical computation is carried out. The solutions are presented in visualization form,

which allows observing evolution of the studied process in time. In the work [5] is investigated the non-stationary filtration process of highly contaminated oil in a heterogeneous porous medium in a two-dimensional formulation. Also computational experiments are given at different parameters of the reservoir and the costs of two production wells. In [6] is studied the properties of self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system. In particular, we find the Zeldovich–Barenblatt type solution to the cross diffusive system. The asymptotic behavior of self-similar solutions are analyzed for both the slow and fast diffusive regimes. It is shown that coefficients of the main term of the asymptotic of solution satisfy some system of nonlinear algebraic equations. Condition of global existence of solution of a non-linear system of cross-diffusion with non-linear boundary conditions is studied in the paper [7]. Critical exponents of Fujita type and critical exponents of global existence of solution are established. In this paper, we study the global solvability and unsolvability conditions of a nonlinear filtration problem with nonlinear boundary flux. In [8] is establish the critical global existence exponent and critical Fujita exponent of nonlinear filtration problem in inhomogeneous medium. An asymptotic representation of the solution with a compact support is obtained, which made it possible to carry out a numerical experiment. The paper [9] provides a detailed analysis of scientific papers related to the problem of mathematical modeling of the oil filtration process in reservoir porous media.

Computational experiments were carried out for various characteristics of the formation and the costs of production wells. In [10] the problem is solved numerically on a computer and numerical experiments are performed in various values of the parameters. For numerical solution of the problem were applied the methods of alternating directions, the method of iterations. In [10] the Cauchy problem for nonlinear systems is considered. The conditions of existence of the solutions on time for the problem Cauchy are given. Moreover the properties of the finite velocity of a propagation and localization of the disturbance, an asymptotic of self-similar solutions will be defined. The results of numerical solutions will be carried out and on the basis of calculations some necessary statements will be given.

In the work [12] is proposed an algorithm to compute the blow-up time by using a finite difference scheme with uniform temporal grid size. The conditions for the existence of a solution to the problem are established in the work [13]. In the work [14] is implemented the moving mesh PDE method for simulating the blow-up in reaction–diffusion equations with temporal and special nonlinear nonlocal terms.

In [16, 17, 19] the quasilinear parabolic equation with a source term and an inhomogeneous density is considered. The conditions on the parameters of the problem are found under which the solution to the Cauchy problem blows up in a finite time. A sharp universal estimate of the solution near the blowup time is obtained.

In the paper [18], is investigated the localization of solutions of the Cauchy problem to a doubly degenerate parabolic equation with a strongly nonlinear source for one equation.

In [20] is devoted to the study of the existence, uniqueness and regularity of a solution for the two main problems, i.e. the initial-value problem and the Dirichlet boundary-value problem. Special attention is paid to the appearance of a free boundary, a consequence of the finite propagation property.

In the work [22, 23] methods and numerical methods for solving two-dimensional problems of oil filtration in two reservoir porous media are considered. The numerical results of calculations of the problem of oil filtration in a porous medium in two reservoir systems are given in the presence of a weakly permeable bridge.

In this work, based on the splitting of the original system, a system of self-similar equations is constructed, approximate solutions are found depending on the values of the parameters of system (1), the asymptotic behavior of the generalized finite solution of system (1) and the free boundary are established. The main parts of the asymptotic — self-similar solutions are obtained. Based on the constructed self-similar solutions, the asymptotic behavior of the solutions, and the free boundary, numerical calculations and visualization of the diffusion reaction process described by system (1) were performed.

2 Construction of a self-similar system of equations

Below, one method is proposed for constructing a system of self-similar and approximately-self-similar equations for system (1) by splitting the original system of partial differential equations into two parts, which relatively facilitates the study of the qualitative properties of solutions to problem (1) - (2), while preserving the properties of the solutions of the original system. Note that although the study of the properties of solutions to the system of self-similar and approximately-self-similar equations is relatively simpler than the study of the properties of the solutions of the original system, it possesses independent mathematical interest.

To construct a self-similar and approximately-self-similar equation for system (1), we look for a solution to the system of equations in the form:

$$\begin{cases} u(t, x) = \bar{u}(t)w(\tau(t), \varphi|x|) \\ v(t, x) = \bar{v}(t)z(\tau(t), \varphi|x|) \end{cases}, \quad (3)$$

where $\bar{u}(t) = A[T + t]^{-\frac{1}{-r_1 - kq_1 + 1}}$, $\bar{v}(t) = B[T + t]^{-\frac{1}{-r_1 - kq_1 + 1}}$,

$$A = \left((-r_1 - kq_2 + 1) \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{q_1}{-r_1 + q_2 + 1}} \right)^{-\frac{1}{-r_1 - kq_1 + 1}},$$

$$B = \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{q_1 - r_2 + 1}} A, \quad k = \frac{q_2 - r_1 + 1}{q_1 - r_2 + 1},$$

is a solution to the system

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \gamma(t)\bar{u}^{q_1}\bar{v}^{r_1}, \quad \frac{d\bar{v}}{dt} = \gamma(t)\bar{u}^{q_2}\bar{v}^{r_2},$$

Substituting (3) into (1) we have a radially-symmetric system

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \varphi^{1-s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varphi^{1-s} w^{m_1-1} \left| \frac{dw}{d\varphi} \right|^{p-2} \frac{dw}{d\varphi} \right) - \\ &\quad - \gamma(t) \bar{u}^{q_1 - (p+m_1-2)} \bar{v}^{r_1} (w - w^{q_1} z^{r_1}). \\ \frac{dz}{d\tau} &= \varphi^{1-s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varphi^{s-1} z^{m_2-1} \left| \frac{dz}{d\varphi} \right|^{p-2} \frac{dz}{d\varphi} \right) - \\ &\quad - \gamma(t) \bar{u}^{q_2} \bar{v}^{r_2 - (p+m_1-2)} (z - w^{q_2} z^{r_2}), \end{aligned}$$

If is chosen in the form

$$\tau(t) = \int_0^t \bar{v}^{m_1-1}(\eta) \bar{u}^{p-2}(\eta) d\eta = \int_0^t \bar{u}^{m_2-1}(\eta) \bar{v}^{p-2}(\eta) d\eta \quad (4)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{p_1} |r|^{p_1}, \quad |r| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}, \quad p_1 = \frac{p-(n+l)}{p}, \quad s = p \frac{N-l}{p-(n+l)}, \quad n+l < p.$$

It is easy to see that system has an approximately self-similar solution of the following form

$$\begin{aligned} w(\tau, \varphi) &= f(\xi), \\ z(\tau, \varphi) &= \psi(\xi), \end{aligned} \quad (5)$$

where, $\xi = \frac{|x|}{\tau^{1/p}}$ and functions $f(\xi)$, $\psi(\xi)$ satisfy the following system of nonlinear degenerate approximately self-similar system of equations..

$$\begin{aligned} &\xi^{1-s} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{s-1} f^{m_1-1} \left| \frac{df}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{df}{d\xi} - \\ &-\gamma(t)\tau(t)\bar{u}^{q_1-(p+m_1-2)}\bar{v}^{r_1}(f - f^{q_1}\psi^{r_1}) = 0, \\ &\xi^{1-s} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{s-1} f^{m_2-1} \left| \frac{d\psi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\psi}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{d\psi}{d\xi} - \\ &-\gamma(t)\tau(t)\bar{u}^{q_2}\bar{v}^{r_2-(p+m_2-2)}(\psi - f^{q_2}\psi^{r_2}) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

If

$$\begin{aligned} \gamma(t)\tau(t)\bar{u}^{q_1-(p-1)-(m_1-1)}\bar{v}^{r_1} &\rightarrow const., \text{ by } t \rightarrow \infty, \\ \gamma(t)\tau(t)\bar{v}^{r_2-(p-1)-(m_2-1)}\bar{u}^{q_2} &\rightarrow const., \text{ by } t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (7)$$

system (6) will become self-similar. It is easy to prove that if $0 < \gamma(t) \in H$, where H -Hardy body, then condition (7) is satisfied.

Now we will study the asymptotic behavior of the finite solutions of system (7) at $\gamma(t) = const$. We investigate the system of equations (7) by the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 > 0, \quad f(b) = 0, \\ \psi(0) &= 1 > 0, \quad \psi(b) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

where $0 < b < +\infty$. Existence of self-similar solution to problem (7), (8) for the case in equation $\gamma(t) = 0$, $n = l = 0$, $p = 2$ were investigated in [6], moreover, conditions for the existence of solutions with a compact support were obtained.

We will study the asymptotics of solutions with a compact support of system (7) in case $m_1 + p - 3 > 0$, $m_2 + p - 3 > 0$. For this, we transform system (10) to a form convenient for research, supposing that

$$\begin{cases} f(\xi) = \bar{f}(\xi)y_1(\eta), \\ \psi(\xi) = \bar{\psi}(\xi)y_2(\eta), \end{cases} \quad \eta = -\ln \left(a - b\xi^{\frac{p}{p-1}} \right), \quad 0 < \xi < a^{\frac{1}{\lambda}}, \quad (9)$$

where $\bar{f}(\xi) = (a - \xi^\lambda)_+^{q_1}$, $\bar{\psi}(\xi) = (a - \xi^\lambda)_+^{q_2}$, $\lambda = \frac{p}{p-1}$,

$$q_1 = \frac{(p-1)(p-(m_1+1))}{q}, \quad q_2 = \frac{(p-1)(p-(m_2+1))}{q},$$

$$p > m_1 + 1, \quad p > m_2 + 1, \quad a > 0, \quad q = (p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1).$$

Case $(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1) = 0$ is called singular case. In this case, the asymptotic behavior of the solutions of system (7) has a different behavior and more research is required.

Theorem 1. Let $q_1 > 0$, $q_2 > 0$. Then the solution with the compact support of system (10) at $\eta \rightarrow +\infty$ ($\xi \rightarrow a^{1-\frac{1}{p}}$) has the asymptotics

$$\begin{aligned} f(\xi) &= y_1^0 \bar{f}(\xi) (1 + o(1)), \\ \psi(\xi) &= y_1^0 \bar{\psi}(\xi) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (10)$$

where $0 < y_i^0 < +\infty$ ($i = 1, 2$), when one of the following conditions is met:
1) $\beta_i > \frac{2-m}{p-1}$ and (y_1^0, y_2^0) are the roots (y_1, y_2) of system of nonlinear algebraic equations

$$\begin{cases} (y_2^0)^{m_1-1} (y_1^0)^{p-2} = c_1, \\ (y_1^0)^{m_2-1} (y_2^0)^{p-2} = c_2, \end{cases} \quad (11)$$

where $i = \frac{1}{p(\lambda q_i)^{p-1}}$, $i = 1, 2$, i.e

$$\begin{cases} y_1^0 = \frac{1}{\lambda q_1} \left(\frac{1}{\lambda p q_1} \right)^{\frac{1}{p-2}} \left[\frac{\lambda^{p-2} p q_2^{p-1}}{q_1 (\lambda q_1 p)^{\frac{1}{p-2}}} \right]^{\frac{m_1-2}{q}}, \\ y_2^0 = \left[\frac{q_1 (\lambda q_1 p)^{\frac{1}{p-2}}}{\lambda^{p-2} p q_2^{p-1}} \right]^{\frac{p-2}{q}}. \end{cases}$$

where q_i , $i = 1, 2$ - are the coefficients defined above,

2) $\beta_i = \frac{q_i-1}{q_i}$, $i = 1, 2$, and (y_1^0, y_2^0) are the roots of the following system of nonlinear algebraic equations

$$\begin{cases} q_1^{p-1} (y_1^0)^{m_1+p-3} + \frac{a_1 (y_1^0)^{q_1-1} (y_2^0)^{q_1-1}}{a \lambda^p q_1} = \frac{1}{p \lambda^{p-1}}, \\ q_2^{p-1} (y_2^0)^{m_2+p-3} + \frac{a_2 (y_1^0)^{q_2-1} (y_2^0)^{q_2-1}}{a \lambda^p q_2} = \frac{1}{p \lambda^{p-1}}, \end{cases} \quad (12)$$

Proof. To prove Theorem 1, we use the replacement (9). As a result, the self-similar system (5), by transforming (9), is reduced to the form:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\eta} L_1(y_1, y_2) + \left(\frac{s}{\lambda} \varphi(\eta) - q_1 \right) L_1(y_1, y_2) + \\ & + \frac{y_1' - q_1 y_1}{\lambda^{p-1}} \varphi(\eta) + \frac{a_1}{\lambda^p} \varphi(\eta) (y_1 + \varphi_1(\eta) y_1^{\beta_1}) = 0, \\ & \frac{d}{d\eta} L_2(y_1, y_2) + \left(\frac{s}{\lambda} \varphi(\eta) - q_2 \right) L_2(y_1, y_2) + \\ & + \frac{y_2' - q_2 y_2}{\lambda^{p-1}} \varphi(\eta) + \frac{a_2}{\lambda^p} \varphi(\eta) (y_2 + \varphi_2(\eta) y_2^{\beta_2}) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

where $\varphi(\eta) = \frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}$, $\varphi_i(\eta) = e^{-\eta q_i (\beta_i-1)}$, $i = 1, 2$,

$$L_1(y_1, y_2) = y_1^{m_1-1} \left(\left| \frac{dy_1}{d\eta} - q_1 y_1 \right| \right)^{p-2} \left(\frac{dy_1}{d\eta} - q_1 y_1 \right),$$

$$L_2(y_1, y_2) = y_2^{m_2-1} \left(\left| \frac{dy_2}{d\eta} - q_2 y_2 \right| \right)^{p-2} \left(\frac{dy_2}{d\eta} - q_2 y_2 \right),$$

In which λ , q_i , a_i , $i = 1, 2$ are above defined coefficients.

Since the transformation (9) will allow the study of the asymptotics of the equations of system (7) at $\eta \rightarrow +\infty$ solution of system (13) around $+\infty$ satisfying the condition

$$\frac{dy_i}{d\eta} - q_i y_i \neq 0, \quad y_i(\eta) > 0, \quad i = 1, 2.$$

First we will show that solutions $y_1(\eta)$, $y_2(\eta)$ of the system (13) has finite solutions at. $\eta \rightarrow +\infty$

Noting that

$$v_i(\eta) = L_i(y_1, y_2), \quad i = 1, 2.$$

Then system (16) can be rewritten in the following form

$$v_1' = \left(\frac{s}{\lambda} \varphi(\eta) - q_1 \right) v_1 + \frac{y_1' - q_1 y_1}{\lambda^{p-1}} \varphi(\eta) + \frac{a_1}{\lambda^p} \varphi(\eta) (y_1 + \varphi_1(\eta) y_1^{\beta_1}) = 0,$$

$$v_2' = \left(\frac{s}{\lambda} \varphi(\eta) - q_2 \right) v_2 + \frac{y_2' - q_2 y_2}{\lambda^{p-1}} \varphi(\eta) + \frac{a_2}{\lambda^p} \varphi(\eta) (y_2 + \varphi_2(\eta) y_2^{\beta_2}) = 0,$$

Analyzing the solutions of the system and introducing auxiliary functions we obtain

$$\theta_1(\mu_1, \eta) = - \left(\frac{s}{\lambda} \varphi(\eta) - q_1 \right) \mu_1 - \frac{y_1' - q_1 y_1}{\lambda^{p-1}} \varphi(\eta) - \frac{a_1}{\lambda^p} \varphi(\eta) (y_1 + \varphi_1(\eta) y_1^{\beta_1}),$$

$$\theta_2(\mu_2, \eta) = - \left(\frac{s}{\lambda} \varphi(\eta) - q_2 \right) \mu_2 - \frac{y_2' - q_2 y_2}{\lambda^{p-1}} \varphi(\eta) - \frac{a_2}{\lambda^p} \varphi(\eta) (y_2 + \varphi_2(\eta) y_2^{\beta_2}),$$

where μ_i , $i = 1, 2$ are real numbers. For each value μ_i the functions $\theta_i(\mu_i, \eta)$ retain their sign at a certain interval $[\eta_{\mu_i}, +\infty) \subset [\eta_0, +\infty)$ ($0 < \eta_0 < \eta_{\mu_i}$) for any $\eta \in [\eta_{\mu_i}, +\infty)$ one of the following conditions holds

$$\theta_i(\mu_i, \eta) > 0, \quad \theta_i(\mu_i, \eta) < 0.$$

Considering a theorem from [13] boundary of the function $v_i(\eta)$ is in $\eta \in [\eta_{\mu_i}, +\infty)$:

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} v_i(\eta) < +\infty, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} v_i'(\eta) = 0.$$

Thus, we obtain

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} y_i(\eta) = y_i^0 < +\infty, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} y_i'(\eta) = 0.$$

From here we have

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow +\infty} v_1'(\eta) = \\ & = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[- \left(\frac{s}{\lambda} \varphi(\eta) - q_1 \right) \mu_1 - \frac{y_1' - q_1 y_1}{\lambda^{p-1}} \varphi(\eta) - \frac{a_1}{\lambda^p} \varphi(\eta) (y_1 + \varphi_1(\eta) y_1^{\beta_1}) \right] = 0, \\ & \lim_{\eta \rightarrow +\infty} v_2'(\eta) = \\ & = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[- \left(\frac{s}{\lambda} \varphi(\eta) - q_2 \right) \mu_2 - \frac{y_2' - q_2 y_2}{\lambda^{p-1}} \varphi(\eta) - \frac{a_2}{\lambda^p} \varphi(\eta) (y_2 + \varphi_2(\eta) y_2^{\beta_2}) \right] = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

Taking into account the last boundaries, we obtain the following system of algebraic equations (11) from (14)

$$\begin{cases} (y_2^0)^{m_1-1} (y_1^0)^{p-2} = c_1, \\ (y_1^0)^{m_2-1} (y_2^0)^{p-2} = c_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1^{p-1} (y_2^0)^{m_1-1} (y_1^0)^{p-2} + \frac{a_1 (y_1^0)^{\beta_1-1}}{a \lambda^p q_1} = \frac{1}{p \lambda^{p-1}}, \\ q_2^{p-1} (y_1^0)^{m_1-1} (y_2^0)^{p-2} + \frac{a_2 (y_2^0)^{\beta_2-1}}{a \lambda^p q_2} = \frac{1}{p \lambda^{p-1}}, \end{cases} \quad (15)$$

at $\beta_i = \frac{q_i-1}{q_i}$, $i = 1, 2$.

Thus, we obtained the asymptotic representation (10).

a) The case of rapid diffusion ($q_i < 0$, $i = 1, 2$.)

In the case of rapid diffusion, we will study the asymptotics of the regular solution of the self-similar system (10)) at

$$\xi \rightarrow +\infty$$

with the boundary conditions

$$\begin{aligned} f(0) = 1 > 0, \quad f(\infty) = 0, \\ \psi(0) = 1 > 0, \quad \psi(\infty) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

We will make a replacement in (7)

$$\begin{cases} f(\xi) = \bar{f}(\xi) y_1(\eta), \\ \psi(\xi) = \bar{\psi}(\xi) y_2(\eta), \end{cases} \quad (17)$$

where $\eta = \ln(a + \xi^\lambda)$, $\bar{f}(\xi) = (a + \xi^\lambda)_+^{q_1}$, $\bar{\psi}(\xi) = (a + \xi^\lambda)_+^{q_2}$, $a > 0$, λ , q_1 , q_2 coefficients defined above.

Theorem 2. Let $q_1 < 0$, $q_2 < 0$, $\beta_i > 1$, $i = 1, 2$. Then the solutions of system (10) at $\eta \rightarrow +\infty$ ($\xi \rightarrow +\infty$) has an asymptotic form

$$\begin{aligned} f(\xi) &= y_1^0 \bar{f}(\xi) (1 + o(1)), \\ \psi(\xi) &= y_1^0 \bar{\psi}(\xi) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (18)$$

where $0 < y_i^0 < +\infty$ ($i=1,2$), when one of the following conditions is met:

1) $(N-l) [(m_i-1)(m_{3-i}-1) - (p-2)^2] - (p-n-l)(p-m_i-l) > 0$ and $a_i > \frac{p-(m_i+1)}{(m_i-1)(m_{3-i}-1)-(p-2)^2}$, $i = 1, 2$, (y_1^0, y_2^0) are the roots of (y_1, y_2) system of nonlinear algebraic equations

$$\begin{cases} (y_2^0)^{m_1-1} (y_1^0)^{p-2} = 1, \\ (y_1^0)^{m_2-1} (y_2^0)^{p-2} = 2, \end{cases}$$

2) $(N-l) [(m_i-1)(m_{3-i}-1) - (p-2)^2] - (p-n-l)(p-m_i-l) < 0$, $a_i < \frac{p-(m_i+1)}{(m_i-1)(m_{3-i}-1)-(p-2)^2}$, $i = 1, 2$, and (y_1^0, y_2^0) are the roots of the following system of nonlinear algebraic equations

$$\begin{cases} (s + \lambda q_1) (|q_1 y_1^0|)^{p-2} (y_2^0)^{m_1-1} + \frac{1}{p \lambda^{p-2}} - \frac{a_1}{q_1 \lambda^{p-1}} = 0, \\ (s + \lambda q_2) (|q_2 y_2^0|)^{p-2} (y_1^0)^{m_2-1} + \frac{1}{p \lambda^{p-2}} - \frac{a_2}{q_2 \lambda^{p-1}} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

Proof. After replacement (17) in system (7) it is reduced to the form:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\eta} L_i(y_1, y_2) + \left(\frac{s}{\lambda} \varphi_1(\eta) - q_i \right) L_i(y_1, y_2) + \\ & + \frac{1}{p\lambda^{p-1}} \varphi_1(\eta) (y_i' - q_i y_i) + \frac{a_i}{\lambda^p} \varphi_1(\eta) (y_i + \varphi_{2i}(\eta) y_i^{\beta_i}) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

where $\varphi_1(\eta) = \frac{e^{-\eta}}{e^{-\eta}-a}$, $\varphi_{2i}(\eta) = e^{-\eta q_i(\beta_i-1)} \varphi_1(\eta)$, $i = 1, 2$,

$$L_i(y_1, y_2) = y_{3-i}^{m_i-1} \left(\left| \frac{dy_i}{d\eta} + q_i y_i \right| \right)^{p-2} \left(\frac{dy_i}{d\eta} + q_i y_i \right).$$

Thus, the study of the asymptotics of the equations of system (10) at $\eta \rightarrow +\infty$ is replaced by the study of the solution of system (23) around $+\infty$ satisfying the condition

$$\frac{dy_i}{d\eta} + q_i y_i \neq 0, \quad y_i(\eta) > 0, \quad i = 1, 2.$$

Proceeding to (20) at $\eta \rightarrow +\infty$, we obtain the necessary conditions and the system of algebraic equations (19). The proof of the second part of the theorem is proved in a similar way.

3 Results of numerical experiments and visualization

When solving the problem numerically, the equation is approximated on a grid using an implicit scheme of variable directions (for the multidimensional case) in combination with the balance method. Iterative processes were built on the basis of the Picard, Newton method as well as special method. In a special method terms $U^{Q_1} V^{R_1}$, $U^{Q_2} V^{R_2}$ in system (1) are presented in a form $U_K^{Q_1} V_K^{R_1} = U_{K-1}^{Q_1-1} V_K V_{K-1}^{R_1}$, $U_K^{Q_2} V_K^{R_2} = U_{K-1}^{Q_2-1} V_{K-1}^{R_2-1} V_K$ where u_0 , v_0 solutions of a system of equations of homogeneous differential equations

$$\frac{du_0}{dt} = u_0^{q_1} v_0^{r_1}, \quad \frac{dv_0}{dt} = u_0^{q_2} v_0^{r_2}.$$

Calculation results for various values of the reduction parameters in Fig. 1-6.

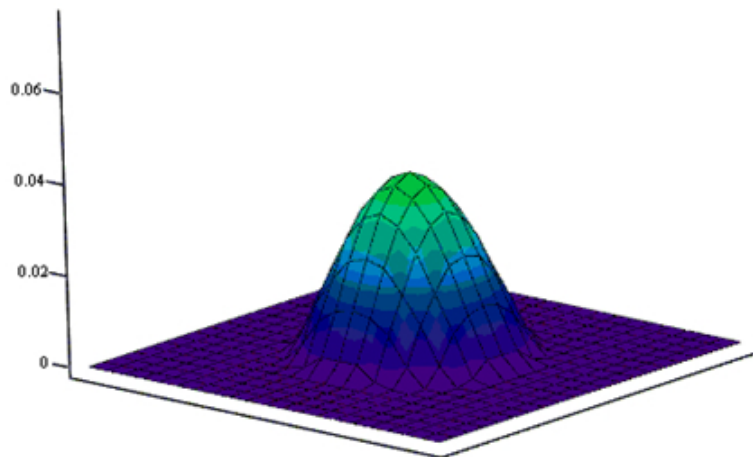


Figure 1 $u(t, x, y)$ at $t = 0$; $n = 2$; $m_1 = 1, 5$; $m_2 = 2$; $p = 2.5$; $q_1 = 2$; $q_2 = 1.8$; $r_1 = 1.5$; $r_2 = 2$; $\gamma = 1.2$ (source).

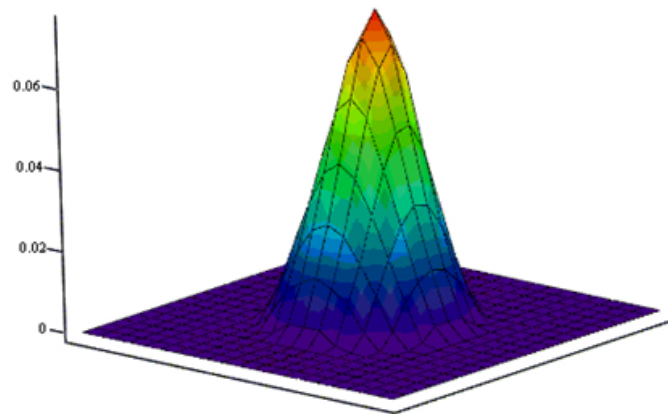


Figure 2 $u(t, x, y)$ at $t = 1; n = 2; m_1 = 1, 5; m_2 = 2; p = 2.5;$
 $q_1 = 2; q_2 = 1.8; r_1 = 1.5; r_2 = 2; \gamma = 1.2$ (source).

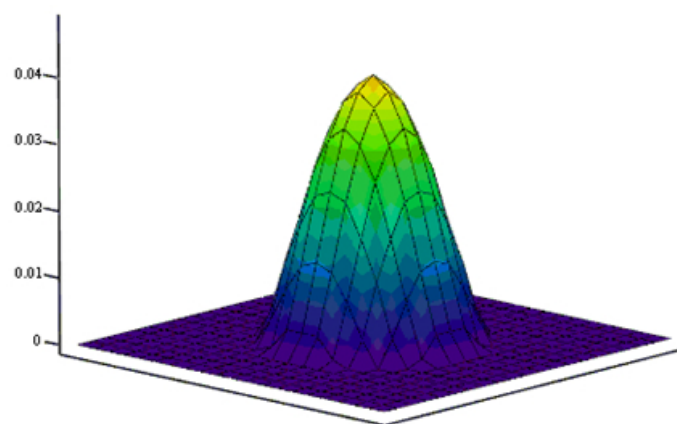


Figure 3 $v(t, x, y)$ at $t = 0; n = 2; m_1 = 1, 5; m_2 = 2; p = 2.5;$
 $q_1 = 2; q_2 = 1.8; r_1 = 1.5; r_2 = 2; \gamma = 1.2$ (source).

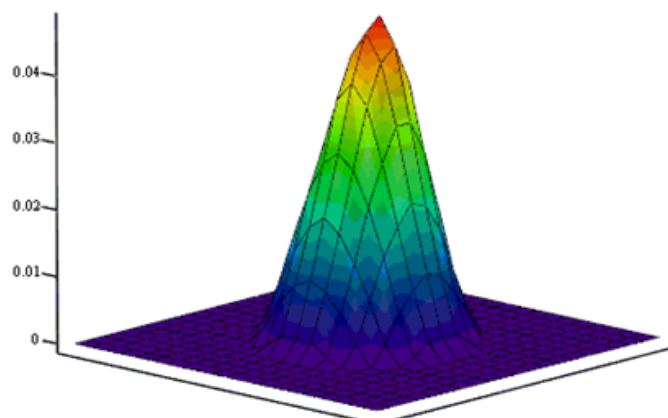


Figure 4 $v(t, x, y)$ at $t = 0; n = 2; m_1 = 1, 5; m_2 = 2; p = 2.5;$
 $q_1 = 2; q_2 = 1.8; r_1 = 1.5; r_2 = 2; \gamma = 1.2$ (source).

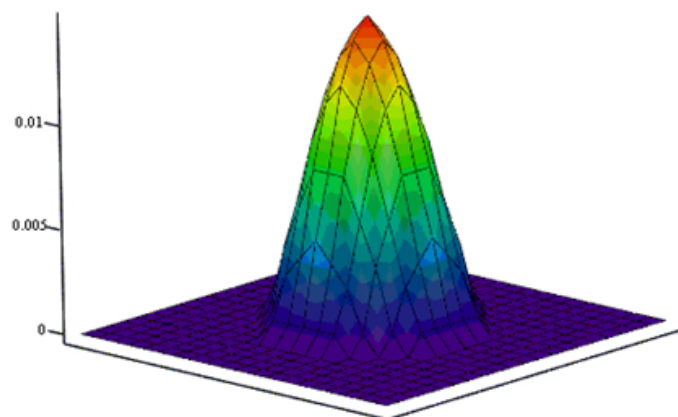


Figure 5 $u(t, x, y)$ at $t = 0$; $n = 2$; $m_1 = 1, 5$; $m_2 = 2$; $p = 2.5$; $q_1 = 2$; $q_2 = 1.8$; $r_1 = 1.5$; $r_2 = 2$; $\gamma = -1.2$ (*source*).

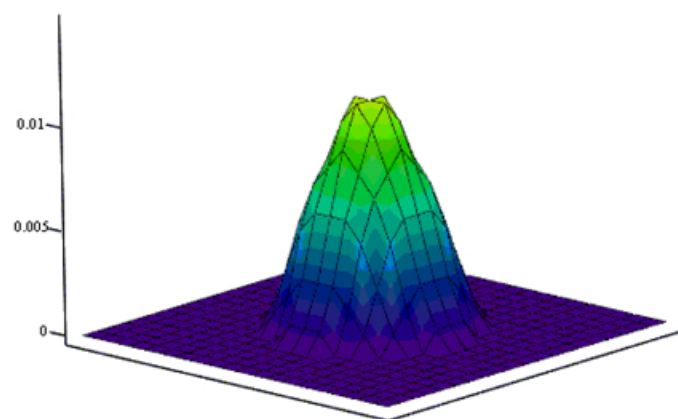


Figure 6 $u(t, x, y)$ at $t = 0$; $n = 2$; $m_1 = 1, 5$; $m_2 = 2$; $p = 2.5$; $q_1 = 2$; $q_2 = 1.8$; $r_1 = 1.5$; $r_2 = 2$; $\gamma = -1.2$ (*source*).

4 Conclusion

The results of computational experiments show that all of the listed iterative methods are effective for solving nonlinear problems and lead to nonlinear effects if we use self-similar solutions constructed by the nonlinear splitting method and the standard equation method as the initial approximation of the solution [4, 6]. As expected, in order to achieve an identical accuracy, the Newton method requires fewer iterations than the methods of Picard and a special method because of the successful choice of the initial approximation. Note that in each of the cases considered, the Newton method has the best convergence due to the choice of a good initial approximation. In some cases, the total iteration amount is almost two times and the maximum iteration is almost 4 times less than other methods.

The results of numerical calculations show the effect of the finite velocity of disturbance propagation and the localization of the solution depends on the values of the numerical parameters. All results of numerical experiments are presented in the form of visualized animation.

References

- [1] M. Aripov and S. Sadullaeva 2015. “An asymptotic analysis of a self-similar solution for the double nonlinear reaction-diffusion system.” *Nanosyst. Physics, Chem. Math.*,
- [2] M. Aripov and S. A. Sadullaeva 2015. “Qualitative Properties of Solutions of a Doubly Nonlinear Reaction-Diffusion System with a Source.” *J. Appl. Math. Phys.*,
- [3] S. A. Sadullaeva and M. B. Khojimurodova 2018. “Properties of solutions of the cauchy problem for degenerate nonlinear cross systems with convective transfer and absorption.” in *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*,
- [4] S. A. Sadullaeva 2016. “Numerical investigation of solutions to a reaction-diffusion system with variable density.” *J. Sib. Fed. Univ. - Math. Phys.*,
- [5] Ravshanov N., Nazirova E. 2018. *Numerical simulation of filtration processes of strongly polluted oil in a porous medium*. PONTE, International Journal of Sciences and Research. Vol. P. 107–116.
- [6] M. M. Aripov and A. S. Matyakubov 2017. “Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density” *Nanosyst. Physics, Chem. Math.*,
- [7] Z. R. Rakhmonov and J. E. Urunbayev 2019. *On a problem of cross-diffusion with nonlocal boundary conditions*. *J. Sib. Fed. Univ. - Math. Phys.*,
- [8] Z. R. Rakhmonov and A. I. Tillaev 2018. *On the behavior of the solution of a nonlinear polytropic filtration problem with a source and multiple nonlinearities*. *Nanosyst. Physics, Chem. Math.*, P. 323–329.
- [9] Nazirova E. 2018. *Mathematical model and algorithm for solving the problem of oil filtration in two-layer porous media* *Problems of Computational and Applied Mathematics*, ISSN 2181–8460, P. 33–46.
- [10] S. A. Sadullaeva., A. T. Khaydarov., F. A. Kabilianova. 2019. *Modeling of Multidimensional Problems in Nonlinear Heat Conductivity in Non-Divergence Case*. *IEEE Trans Consumer Electron* 53(4):1752-8. Ankara: DOI: 10.1109/ISMSIT.2019.8932954
- [11] Sh. A. Sadullaeva, M. B. Khojimurodova 2017. *Recursively separated and weighted histogram equalization for brightness preservation and contrast enhancement*. *USUZCAMP : Complex Analysis, and Pluripotential Theory*, P. 183–190.
- [12] Cho, Chien-Hong 2013. *On the computation of the numerical blow-up time*. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.* P. 331–349.
- [13] Deng K., Levine H. A. 2000. *An Improved Image Contrast Enhancement in Multiple-Peak Images based on Histogram Equalization method*. *The sequel. J. Math. Anal.* P. 85–126.
- [14] Ferreira, Rael, Perez-Llanos, Mayte. 2012. *Blow-up for the non-local -Laplacian equation with a reaction term*. *Nonlinear Anal.: Theory Methods Appl.* P. 5499–5522.
- [15] Chen Botao., Mi Yongsheng., Mu Chunlai. 2011. *Global existence and nonexistence for a doubly degenerate parabolic system coupled via nonlinear boundary flux*. *Acta Mathematica Scientia*, P. 681–693. [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(11\)60268-3](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(11)60268-3)
- [16] Martynenko A. V., Tedeev A. F. 2007. *The Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a source and inhomogeneous density*. *Comput. Math. Math. Phys.* P. 238–248.
- [17] Martynenko A. V., Tedeev A. F. 2008. *On the behavior of solutions to the Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and a source*. *Comput. Math. Math. Phys.* P. 1145–1160.
- [18] Mu C., Zheng, P. Dengming Liu 2018. *Localization of solutions to a doubly degenerate parabolic equation with a strongly nonlinear source*. *Commun. Contemp.* <https://doi.org/10.1142/S0219199712500186>

- [19] Tedeyev A. F. 2004. *Conditions for the existence and nonexistence of a compact support in time of solutions of the Cauchy problem for quasilinear degenerate parabolic equations*. Sib. Math. Jour. P. 189–200.
- [20] Vazquez J. L. 2007. *The Porous Medium Equation*. Oxford Mathematical Monographs, p. 430.
- [21] Nazirova E. 2018. *Computer simulation of oilfield development processes and visualization of the results of a computational experiment*. Bulletin of TUIT P. 95–108.
- [22] N. Ravshanov, D. K. Sharipov, N. Narzullaeva 2016. *Improved mathematical model of the processes of transport and diffusion of harmful substances in the surface atmospheric boundary layer*. Scientific Review, Technical Sciences, P. 49–59.
- [23] N. Ravshanov, K. Kodirov 2016. *Modeling the process pressureless filtering groundwater flows with the presence of wells gallery*. Problems of Computational and Applied Mathematics, P. 33–46.

Received February 20, 2020

УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ И ИСТОЧНИКОМ

¹Садуллаева Ш. А., ²Хайдаров А. Т., ¹Файзуллаева З.

orif_sh@list.ru; haydarovabdu@rambler.ru; nigor1802@mail.ru

¹Ташкентский университет информационных технологий,
ул. Амира Темура 108, Ташкент 100200, Узбекистан;

²Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, 4, Ташкент 100174, Узбекистан

В данной работе исследованы свойства решения автомодельных и приближенно автомодельных решений уравнений для реакционно-диффузионной системы с двойной нелинейностью. Исследовано влияние параметров реакционно-диффузионной системы в процессе эволюции. Доказано существование значений параметров, для которых уравнение имеет конечное решение. Рассматриваемая в работе система уравнений лежит на основе многих физических процессов, например, эта система описывает процесс реакции-диффузии, теплопроводности, политропической фильтрации газа и жидкости в нелинейной среде с источником. Особенное свойство этого уравнения является в его вырождение. И поэтому исследовали слабое решение, так как что в этом случае решение задачи может не существовать в классическом смысле. Основным методом для исследования рассматриваемой проблемы являются автомодельный и приближенно-автомодельный подходы. Эти подходы интенсивно используются для исследования свойств решения с конечной скоростью возмущения, свойства решений с обострением, локализации решений. Для этого мы использовали метод нелинейного расщепления для построения систему автомодельных уравнений.

Ключевые слова: параболическое уравнение, асимптотика, конечная скорость, аппроксимация, автомодельный, реакция-диффузия, система, численное решение.

Цитирование: Садуллаева Ш. А., Хайдаров А. Т., Файзуллаева З. Исследование свойств решений нелинейной системы уравнений с неоднородной плотностью и

источником // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 118–132.

Литература

- [1] *Aripov M., Sadullaeva S. A.* “An asymptotic analysis of a self-similar solution for the double nonlinear reaction-diffusion system.” [«Modelirovanie protsessa Negermeticheskaya fil'tratsii gruntovykh vod protekaet s nalichiem galerei skvazhin.»] *Nanosyst. Physics, Chem. Math.*, 2015.
- [2] *M. Aripov and Sadullaeva S. A.* “Qualitative Properties of Solutions of a Doubly Nonlinear Reaction-Diffusion System with a Source.” [“Kachestvennye svoystva resheniy dvazhdy nelineynoy reaktsii-diffuzionnoy sistemy s istochnikom.”] *J. Appl. Math. Phys.*, 2015.
- [3] *Sadullaeva S. A., Khojimurodova M. B.* “Properties of solutions of the cauchy problem for degenerate nonlinear cross systems with convective transfer and absorption.” [Svoystva resheniy zadachi Koshi dlya vyrozhdennykh nelineynykh kross-sistem s konvektivnym perenosom i pogloshcheniem] in *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2018.
- [4] *Sadullaeva S. A.* “Numerical investigation of solutions to a reaction-diffusion system with variable density.” [Chislennoe issledovanie resheniy reaktsionno-diffuzionnoy sistemy s peremennoy plotnost'yu.] *J. Sib. Fed. Univ. - Math. Phys.*, 2016.
- [5] *Ravshanov N., Nazirova E.* Numerical simulation of filtration processes of strongly polluted oil in a porous medium. [Chislennoe modelirovanie protsessov fil'tratsii sil'no zagryaznennoy nefti v poristoy srede] *PONTE, International Journal of Sciences and Research*. Vol. P. 107–116. 2018.
- [6] *Aripov M. M., Matyakubov A. S.* Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density. [Avtomodel'nye resheniya kross-diffuzionnoy parabolicheskoy sistemy s peremennoy plotnost'yu.] *Nanosyst. Physics, Chem. Math.*, 2017.
- [7] *Rakhmonov Z. R., Urumbayev J. E.* On a problem of cross-diffusion with nonlocal boundary conditions. [Ob odnoy zadache kross-diffuzii s nelokal'nymi granichnymi usloviyami] *J. Sib. Fed. Univ. - Math. Phys.*, 2019.
- [8] *Rakhmonov Z. R., Tillaev A. I.* On the behavior of the solution of a nonlinear polytropic filtration problem with a source and multiple nonlinearities. [O povedenii resheniya nelineynoy zadachi politropnoy fil'tratsii s istochnikom i kratnymi nelineynostyami] *Nanosyst. Physics, Chem. Math.*, P. 323–329. 2018.
- [9] *Nazirova E.* Mathematical model and algorithm for solving the problem of oil filtration in two-layer porous media [Matematicheskaya model' i algoritm resheniya zadachi fil'tratsii nefti v dvukhsloynoy poristoy srede] *Problems of Computational and Applied Mathematics*, ISSN 2181–8460, P. 33–46. 2018.
- [10] *Sadullaeva S. A., Khaydarov A. T., Kabilianova F. A.* Modeling of Multidimensional Problems in Nonlinear Heat Conductivity in Non-Divergence Case. [Modelirovanie mnogomernykh zadach nelineynoy teploprovodnosti v nedivergentnom sluchae.] *IEEE Trans Consumer Electron* 53(4):1752-8. Ankara: 2019. DOI: 10.1109/ISMSIT.2019.8932954
- [11] *Sadullaeva Sh. A., Khojimurodova M. B.*, Recursively separated and weighted histogram equalization for brightness preservation and contrast enhancement. [Rekursivno razdelennoe i vzveshennoe vyravnivanie gistogrammy dlya sokhraneniya yarkosti i povysheniya kontrastnosti] *USUZCAMP : Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory*, P. 183–190. 2017.
- [12] *Cho, Chien-Hong* On the computation of the numerical blow-up time. [O vychislenii chislovogo vremeni razduva] *Jpn. J. Ind. Appl. Math.* P. 331–349. 2013.

- [13] *Deng K., Levine H.A.* An Improved Image Contrast Enhancement in Multiple-Peak Images based on Histogram Equalization method.[Uluchshenie kontrastnosti izobrazheniya v mnogopikovykh izobrazheniyakh na osnove metoda vyравnivaniya gistogrammy] The sequel. J. Math. Anal. P. 85–126. 2000.
- [14] *Ferreira, Rael, Perez-Llanos, Mayte.* Blow-up for the non-local -Laplacian equation with a reaction term.[Razrushenie dlya nelokal'nogo uravneniya Laplasa s reaktsionnym chlenom] Nonlinear Anal.: Theory Methods Appl. P. 5499–5522. 2012.
- [15] *Chen Botao., Mi Yongsheng., Mu Chunlai.* Global existence and nonexistence for a doubly degenerate parabolic system coupled via nonlinear boundary flux.[Global'noe sushchestvovanie i nebytie dlya dvukratno vyrozhdennoy parabolicheskoy sistemy, svyazannoy nelineynym granichnym potokom] Acta Mathematica Scientia, P. 681–693. 2011. [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(11\)60268-3](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(11)60268-3)
- [16] *Martynenko A.V., Tedeev A.F.* The Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a source and inhomogeneous density. [Zadacha Koshi dlya kvazilineynogo parabolicheskogo uravneniya s istochnikom i neodnorodnoy plotnost'yu] Comput. Math. Math. Phys. P. 238–248. 2007.
- [17] *Martynenko A.V., Tedeev A.F.* On the behavior of solutions to the Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and a source.[O povedenii resheniy zadachi Koshi dlya vyrozhddayushchegosya parabolicheskogo uravneniya s neodnorodnoy plotnost'yu i istochnikom] Comput. Math. Math. Phys. P. 1145–1160. 2008.
- [18] *Mu C., Zheng, P. Dengming Liu* Localization of solutions to a doubly degenerate parabolic equation with a strongly nonlinear source.[Lokalizatsiya resheniy dvazhdy vyrozhddayushchegosya parabolicheskogo uravneniya s sil'no nelineynym istochnikom] Commun. Contemp. 2018. <https://doi.org/10.1142/S0219199712500186>
- [19] *Tedeyev A.F.* Conditions for the existence and nonexistence of a compact support in time of solutions of the Cauchy problem for quasilinear degenerate parabolic equations.[Usloviya sushchestvovaniya i otsutstviya kompaktnogo nositelya vo vremeni resheniy zadachi Koshi dlya kvazilineynykh vyrozhddayushchikhsya parabolicheskikh uravneniy] Sib. Math. Jour. P. 189–200. 2004.
- [20] *Vazquez J.L.* The Porous Medium Equation.[Uравнение poristoy sredy] Oxford Mathematical Monographs, p. 430. 2007.
- [21] *Nazirova E.* Computer simulation of oilfield development processes and visualization of the results of a computational experiment.[Komp'yuternoe modelirovanie protsessov razrabotki neftyanykh mestorozhdeniy i vizualizatsiya rezul'tatov vychislitel'nogo eksperimenta] Bulletin of TUIT P. 95–108. 2018.
- [22] *Ravshanov N., Sharipov D.K., Narzullaeva N.* Improved mathematical model of the processes of transport and diffusion of harmful substances in the surface atmospheric boundary layer.[Uluchshennaya matematicheskaya model' protsessov perenosa i diffuzii vrednykh veshchestv v prizemnom prizemnom sloe atmosfery] Scientific Review, Technical Sciences, P. 49–59. 2016.
- [23] *Ravshanov N., Kodirov K.* Modeling the process pressureless filtering groundwater flows with the presence of wells gallery.[Modelirovanie protsessa bez davleniya] Problems of Computational and Applied Mathematics, P. 33–46. 2016.

Поступила в редакцию 20.02.2020

UDC 517.957

NUMERICAL MODELING OF THE CROSS DIFFUSION PROCESS WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Urunbaev J. E.

u-jasur@samdu.uz

Samarkand State university,

University blv. 15, Samarkand 140104, Uzbekistan.

In this paper, we study the asymptotic behavior of self-similar solutions of nonlinear cross-diffusion system associated with nonlocal boundary conditions. We are constructed various self-similar solutions to the cross diffusion problem for the case of slow diffusion, which are the asymptotics of the solutions to the problem under consideration. The main term of the asymptotics of self-similar solutions is obtained. For a numerical study of the problem under consideration, a method is proposed for choosing the optimal initial approximation for the iterative process. Using asymptotic formulas as the initial approximation for the iterative process, numerical calculations are performed. The calculation results are visualized in time and the results are analyzed. Results of numerical experiments show that the obtained results are in good agreement with the physics of the process of nonlinear cross diffusion.

Keywords: cross-diffusion, asymptotic behavior, nonlinear boundary conditions, appropriate initial approximation, numerical analysis.

Citation: Urunbaev J. E. 2020. Numerical modeling of the cross diffusion process with non-local boundary conditions. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26): 133–145.

1 Introduction

The qualitative properties of solutions of a nonlinear system of cross-diffusion associated with nonlocal boundary conditions are studied in the paper

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases} \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} -v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} (0, t) = u^{q_1} (0, t), \\ -u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} (0, t) = v^{q_2} (0, t), \end{cases} \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (3)$$

where $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$, $m_i > 1$, $q_i > 0$ ($i = 1, 2$), u_0 and $v_0(x)$ - are non-negative continuous functions with compact support in R_+ .

Recently, there has been a surge in the analysis and simulation of mathematical models of the reaction-diffusion type in the presence of the so-called cross-diffusion. Cross-diffusion is a process in which a concentration or density gradient of one chemical or biological type induces a flow (linear or non-linear) of another type. The concept of cross-diffusion also includes well-known cases of modeling chemo- and hypo taxis. The application of reaction-cross-diffusion of a system is easily found in literature and includes the pattern formation development in biology [1], electrochemistry [2], cancer motility [3-5] and biofilms [6]. By introducing cross-diffusion into standard reaction-diffusion models,

it has shown that there is no cross-diffusion when preventing explosion phenomena associated with such systems [7]. Explicit analytical solutions to these complex and often nonlinearly coupled systems of partial differential equations rarely exist, and thus several numerical methods have been applied to obtain approximate solutions.

Cross-diffusion models are found in various fields of natural science. For example, in physical systems (plasma physics) [8-10], in chemical systems (dynamics of electrolytic solutions), in biological systems (cross-diffusion transport, dynamics of population systems), in ecology (dynamics of forest age structure), in seismology - Burridge-Knopoff model describing the tectonic plates interaction [11-14]. In recent years, in the study of biological population and the tectonic plates movement, mathematical models with cross-diffusion have been widely used [14, 15].

It is known that systems of degenerate equations may not have a classical solution in the region where $u, v \equiv 0$. In this case, the generalized solution of system (1) is studied in the class of physically meaningful

$$u(x, t), v(x, t) \geq 0, v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x}, u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \in C(R \times (0, +\infty))$$

and satisfying system (1) in the sense of an integral identity [12, 23].

In recent years, the condition for the global existence of solutions and the condition for the occurrence of a blow-up regime has been intensively studied (see [1-7, 11, 13-26]). In [24, 25], the conditions of global solvability and insolubility in time of a solution were studied, and the solution was estimated near the explosion time of a nonlocal diffusion problem

$$u_t = u_{xx}, \quad v_t = v_{xx}, \quad x > 0, \quad 0 < T < \infty, \quad (4)$$

$$-u_x(0, t) = u^\alpha v^p, \quad -v_x(0, t) = u^q v^\beta, \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x > 0. \quad (6)$$

It is proved that if $pq \leq (1 - \alpha)(1 - \beta)$, then every solution to the problem (4) - (6) is global.

In [17], the systems of cross-diffusion equations on a stationary surface of the following form are studied

$$\begin{cases} \frac{\partial u_m}{\partial t} - \sum_{k=1}^r d_{mk} \Delta_\Gamma u_k = f_m(u_1, \dots, u_r), & \text{in } \Gamma \times (0, T), \\ u_m(x, 0) = u_{0,m}(x), \quad \forall x \in \Gamma, \quad m = 1, \dots, r \end{cases}$$

where $r \geq 1$. They provide a fully-discrete scheme by applying the Implicit-Explicit Euler method. In addition, they provide sufficient conditions for the existence of polytopal invariant regions for the numerical solution after spatial and full discretization's. Furthermore, they prove optimal error bounds for the semi- and fully-discrete methods, that is the convergence rates are quadratic in the mesh size and linear in the time step.

In [20] the following problem is investigated

$$u_t = (u^n)_{xx}, \quad v_t = (v^k)_{xx}, \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$-(u^n)_x(0, t) = v^p(0, t), \quad -(v^k)_x(0, t) = u^q(0, t), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+. \quad (9)$$

It is shown that the solution to problem (7) - (8) is global if $pq \leq (n+1)(k+1)/4$. Conditions were obtained on the numerical parameters of systems (7) - (9) under which

the solution to the problem explodes in a finite time. The studies given in [14] should also be noted, there system (7) was studied with the following boundary conditions

$$-(u^n)_x(0, t) = u^\alpha v^p(0, t), \quad -(v^k)_x(0, t) = u^q v^\beta(0, t), \quad t > 0.$$

It is shown that $\min\{y_1 - r_1, y_2 - r_2\} = 0$, where

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2p + k + 1 - 2\beta}{4pq - (k + 1 - 2\alpha)(n + 1 - 2\beta)}, \\ r_2 &= \frac{2p + n + 1 - 2\beta}{4pq - (k + 1 - 2\alpha)(n + 1 - 2\beta)}, \\ y_1 &= \frac{1 - r_1(n-1)}{2}, \quad y_2 = \frac{1 - r_2(k-1)}{2} \end{aligned}$$

are the critical Fujita exponents.

The system of equations (1) for $m_i > 1$, ($i = 1, 2$) describes processes with a finite velocity of propagation of disturbances. System (1) has bounded self-similar solutions with a compact support of the following form

$$\begin{cases} \underline{u}(x, t) = (T + t)^{-\alpha_1} f(\xi), \\ \underline{v}(x, t) = (T + t)^{-\alpha_2} \varphi(\xi), \quad \xi = x(T + t)^{-\beta}, \end{cases} \quad (10)$$

where $T > 0$,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(q_1-1)(q_2-1) - (p-2)(q_2-1) - (m_1-1)(q_1-1)}{p(q_1-1)(q_2-1) - (p-2)(q_2-1) - (m_1-1)(q_1-1)} = \\ &= \frac{(q_1-1)(q_2-1) - (p-2)(q_1-1) - (m_2-1)(q_2-1)}{p(q_1-1)(q_2-1) - (p-2)(q_1-1) - (m_2-1)(q_2-1)}, \\ \alpha_1 &= \frac{(p-1)(q_2-1)}{l_1}, \quad \alpha_2 = \frac{(p-1)(q_1-1)}{l_2}, \end{aligned}$$

$$l_1 = p(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_1 - 1) - (m_2 - 1)(q_2 - 1),$$

$$l_2 = p(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (p - 2)(q_2 - 1) - (m_1 - 1)(q_1 - 1)$$

and functions $(\varphi(\xi), \varphi(\xi))$ are the solutions of the following problem

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(\varphi^{m_1-1} \left| \frac{d\varphi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) - \beta \xi \frac{d\varphi}{d\xi} - \alpha_1 \varphi = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(\varphi^{m_2-1} \left| \frac{d\varphi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) - \beta \xi \frac{d\varphi}{d\xi} - \alpha_2 \varphi = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} -\varphi^{m_1-1} \left| \frac{d\varphi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\varphi}{d\xi} (0) = \varphi^{q_1}(0), \\ -\varphi^{m_2-1} \left| \frac{d\varphi}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\varphi}{d\xi} (0) = \varphi^{q_2}(0), \end{cases} \quad (12)$$

which is obtained after substituting (10) in (1) - (3) and some simplifications. Consider the following functions

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\xi) = A_1 \left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}} \right)^k, \\ \tilde{\varphi}(\xi) = A_2 \left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}} \right)^z, \end{cases} \quad (13)$$

where $k = \frac{(p-1)(p-m_1-1)}{(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}$, $z = \frac{(p-1)(p-m_2-1)}{(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}$, $a > 0$, $A_2^{m_1-1} A_1^{p-2} \left(\frac{kp}{p-1} \right)^{p-1} = \beta$, $A_1^{m_2-1} A_2^{p-2} \left(\frac{zp}{p-1} \right)^{p-1} = \beta$.

2 Main results

Theorem 1. Assume that $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$, then the solution with compact support of the system of equations (11) at $\xi \rightarrow a^{(p-1)/p}$ has an asymptotics

$$\begin{cases} \varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)), \\ \varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)). \end{cases} \quad (14)$$

Proof. A solution to the system of equations (11) is sought in the following form

$$\begin{cases} \varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)w_1(\tau), \\ \varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)w_2(\tau), \end{cases} \quad (15)$$

where $\tau = -\ln\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)$, $w_1(\tau)$, $w_2(\tau)$ - are non-negative and bounded functions, $\tau \rightarrow \infty$ at $\xi \rightarrow a^{\frac{p-1}{p}}$. Substituting (15) into (11) the following system is obtained

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}L_1(w_1, w_2) + \frac{p}{p-1}\left(\frac{e^{-\tau}}{a-e^{-\tau}} - \frac{kp}{p-1}\right)L_1(w_1, w_2) + \frac{\beta p}{A_1^{p-1}A_2^{m_1-1}(p-1)}(kw_1 - w'_1) - \\ - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \frac{\alpha_1}{A_1^{p-2}A_2^{m_1-1}} \frac{e^{-\tau}}{(a-e^{-\tau})}w_1 = 0, \\ \frac{d}{d\tau}L_2(w_1, w_2) + \frac{p}{p-1}\left(\frac{e^{-\tau}}{a-e^{-\tau}} - \frac{kp}{p-1}\right)L_2(w_1, w_2) + \frac{\beta p}{A_2^{p-1}A_1^{m_2-1}(p-1)}(kw_2 - w'_2) - \\ - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \frac{\alpha_2}{A_2^{p-2}A_1^{m_2-1}} \frac{e^{-\tau}}{(a-e^{-\tau})}w_2 = 0, \end{cases} \quad (16)$$

where $L_1(w_1, w_2) = w_2^{m_1-1}(kw_1 - w'_1)$, $L_2(w_1, w_2) = w_1^{m_2-1}(kw_2 - w'_2)$.

Note that the study of the solutions of the last system of equations is equivalent to the study of those solutions of the system of equations (11), each of which in a certain interval $[\tau_0, +\infty)$, satisfies the inequalities:

$$w_1(\tau) > 0, \quad kw_1 - w'_1 \neq 0,$$

$$w_2(\tau) > 0, \quad kw_2 - w'_2 \neq 0.$$

Solutions $(w_1(\tau), w_2(\tau))$ of the system of equations (16) have finite limits at $\tau \rightarrow +\infty$. Let

$$\begin{cases} h_1(\tau) = L_1(w_1, w_2), \\ h_2(\tau) = L_2(w_1, w_2). \end{cases} \quad (17)$$

Then system (16) is reduced to the form

$$\begin{cases} h'_1(\tau) = -\frac{p}{p-1}\left(\frac{e^{-\tau}}{a-e^{-\tau}} - \frac{kp}{p-1}\right)h_1(\tau) - \frac{\beta p}{A_1^{p-1}A_2^{m_1-1}(p-1)}(kw_1 - w'_1) + \\ + \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \frac{\alpha_1}{A_1^{p-2}A_2^{m_1-1}} \frac{e^{-\tau}}{(a-e^{-\tau})}w_1 = 0, \\ h'_2(\tau) = -\frac{p}{p-1}\left(\frac{e^{-\tau}}{a-e^{-\tau}} - \frac{kp}{p-1}\right)h_2(\tau) - \frac{\beta p}{A_2^{p-1}A_1^{m_2-1}(p-1)}(kw_2 - w'_2) + \\ + \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \frac{\alpha_2}{A_2^{p-2}A_1^{m_2-1}} \frac{e^{-\tau}}{(a-e^{-\tau})}w_2 = 0, \end{cases}$$

To analyze the solutions of the last system of equations, consider the following auxiliary functions

$$\begin{cases} G_1(\tau, \varkappa_1) = -\frac{p}{p-1} \left(\frac{e^{-\tau}}{a-e^{-\tau}} - \frac{kp}{p-1} \right) \varkappa_1 - \frac{\beta p}{A_1^{p-1} A_2^{m_1-1} (p-1)} (kw_1 - w'_1) + \\ + \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{\alpha_1}{A_1^{p-2} A_2^{m_1-1}} \frac{e^{-\tau}}{(a-e^{-\tau})} w_1 = 0, \\ G_2(\tau, \varkappa_2) = -\frac{p}{p-1} \left(\frac{e^{-\tau}}{a-e^{-\tau}} - \frac{kp}{p-1} \right) \varkappa_2 - \frac{\beta p}{A_2^{p-1} A_1^{m_2-1} (p-1)} (kw_2 - w'_2) + \\ + \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{\alpha_2}{A_2^{p-2} A_1^{m_2-1}} \frac{e^{-\tau}}{(a-e^{-\tau})} w_2 = 0, \end{cases}$$

where $\varkappa_1, \varkappa_2$ - are the real numbers. It can be seen that in the corresponding right-hand side of the last identity, functions $G_1(\tau, \varkappa_1), G_2(\tau, \varkappa_2)$ retain their sign, i.e. satisfy one of the inequalities

$$\begin{aligned} G_1(\tau, \varkappa_1) &> 0, \quad G_2(\tau, \varkappa_2) > 0, \\ G_1(\tau, \varkappa_1) &< 0, \quad G_2(\tau, \varkappa_2) < 0, \end{aligned} \quad (18)$$

on a certain interval $[\tau_{\varkappa_1}, +\infty) \times [\tau_{\varkappa_2}, +\infty), \tau_{\varkappa_1}, \tau_{\varkappa_2} \in [\tau_0, +\infty)$. Assume that for functions $G_1(\tau, \varkappa_1), G_2(\tau, \varkappa_2)$ the limits at $\tau \rightarrow +\infty$ do not exist. Then, due to the variability of functions $G_1(\tau, \varkappa_1), G_2(\tau, \varkappa_2)$, the straight line $\bar{G}_i = \varkappa_i$ ($i = 1, 2$) intersects the graphs an infinite number of times on interval $[\tau_{\varkappa_1}, +\infty) \times [\tau_{\varkappa_2}, +\infty)$. But, on interval $[\tau_{\varkappa_1}, +\infty) \times [\tau_{\varkappa_2}, +\infty)$ one of the inequalities (18) is fulfilled, therefore, it is impossible to intersect the graphs an infinite number of times. Consequently, the graphs of functions $G_1(\tau, \varkappa_1), G_2(\tau, \varkappa_2)$ intersect the straight line $\bar{G}_i = \varkappa_i$ ($i = 1, 2$) on interval $[\tau_{\varkappa_1}, +\infty) \times [\tau_{\varkappa_2}, +\infty)$ only once. Then, for functions $G_1(\tau, \varkappa_1), G_2(\tau, \varkappa_2)$ there is a limit at $\tau \rightarrow +\infty$. Following (17) for $G_1(\mu_1, \chi), G_2(\mu_2, \psi)$ we get

$$\begin{cases} G_1 = w_2^{m_1-1} (kw_1 - w'_1)^{p-1} = (w_2^0)^{m_1-1} (kw_1^0)^{p-1} + o(1), \\ G_2 = w_1^{m_2-1} (kw_2 - w'_2)^{p-1} = (w_1^0)^{m_2-1} (kw_2^0)^{p-1} + o(1). \end{cases}$$

It is, therefore, necessary that

$$\begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{p}{p-1} \left(\frac{e^{-\tau}}{a-e^{-\tau}} - \frac{kp}{p-1} \right) \varkappa_1 + \frac{\beta p}{A_1^{p-1} A_2^{m_1-1} (p-1)} (kw_1 - w'_1) - \\ - \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{\alpha_1}{A_1^{p-2} A_2^{m_1-1}} \frac{e^{-\tau}}{(a-e^{-\tau})} w_1 = 0, \\ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{p}{p-1} \left(\frac{e^{-\tau}}{a-e^{-\tau}} - \frac{kp}{p-1} \right) \varkappa_2 + \frac{\beta p}{A_2^{p-1} A_1^{m_2-1} (p-1)} (kw_2 - w'_2) - \\ - \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{\alpha_2}{A_2^{p-2} A_1^{m_2-1}} \frac{e^{-\tau}}{(a-e^{-\tau})} w_2 = 0, \end{cases}$$

Hence, taking into account the next limiting process

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\tau}}{a - e^{-\tau}} = 0,$$

it is easy to see that $w_1^0 = 1, w_2^0 = 1$ at $\tau \rightarrow +\infty$.

3 Numerical analysis of solution

A numerical scheme is constructed based on the finite difference method. For this, equations (1) are approximated with the second order of accuracy in spatial coordinates and with the first order in t. An iterative process is constructed; in the inner iteration steps, the node values are calculated by the sweep method. It is known that the choice of an appropriate initial approximation for the iterative process of solving the nonlinear problem (1) - (3) in a general case, is the main difficulty in numerical solution of the problem. When solving specific tasks, the functions are used that reflect some properties of the sought for solutions; these functions are obtained on the basis of a qualitative analysis

of the problem. This difficulty, depending on the value of the numerical parameters of equations, is overcome by successful selecting the initial approximations, for which the established asymptotic formula is taken in the calculations. Based on the above results, numerical calculations were made. Below are the numerical schemes and some results of computational experiments. Consider the system of equations (1) with the initial (3) and boundary conditions (2) and

$$\begin{cases} u(b, t) = \varphi_1(t), \\ v(b, t) = \varphi_2(t), \end{cases}$$

for convenience, rewrite system (1)-(3) as follows

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(u, v) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B(u, v) \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} -K(u, v) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u^{q_1}(0, t), \\ -B(u, v) \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = v^{q_2}(0, t), \quad t > 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (21)$$

where $K(u, v) = v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2}$, $B(u, v) = u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2}$.

Now construct a uniform grid S_h on x with step h :

$$S_h = \{x_i = i \cdot h, \quad h > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \cdot h = b\},$$

and time grid

$$V_\tau = \{t_j = j \cdot \tau, \quad \tau > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad m \cdot \tau = T, \quad T > 0\}.$$

Construct a difference scheme. For this, the balance method and an implicit difference scheme are used:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} [K_{i+1}(v) (u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}) - K_i(v) (u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1})], \\ \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} [B_{i+1}(u) (v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}) - B_i(u) (v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1})], \end{cases} \quad (22)$$

$i = 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$

$$\begin{cases} u_i^0 = u(x_i, 0), \\ v_i^0 = v(x_i, 0), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (23)$$

$$\begin{cases} -K_1(u, v) \frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} = (u_0^j)^{q_1}, \\ -B_1(u, v) \frac{v_1^{j+1} - v_0^{j+1}}{h} = (v_0^j)^{q_2}, \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (24)$$

$$\begin{cases} u_n^j = \varphi_1(t_j), \\ v_n^j = \varphi_2(t_j), \end{cases} \quad j = 2, 3, \dots, m. \quad (25)$$

Where $K(u, v)$, $B(u, v)$ are calculated according to one of the following formulas

$$a) \begin{cases} K_i(u, v) = K\left(\frac{u_i + u_{i-1}}{2}, \frac{v_i + v_{i-1}}{2}\right), \\ B_i(u, v) = B\left(\frac{u_i + u_{i-1}}{2}, \frac{v_i + v_{i-1}}{2}\right), \end{cases} \quad (26)$$

$$b) \begin{cases} K_i(u, v) = \frac{K(u_i, v_i) + K(u_{i-1}, v_{i-1})}{2}, \\ B_i(u, v) = \frac{B(u_i, v_i) + B(u_{i-1}, v_{i-1})}{2}. \end{cases} \quad (27)$$

It is seen that the systems of algebraic equations (22) are nonlinear with respect to u^{j+1} and v^{j+1} . For numerical solution of such systems of nonlinear equations, various iterative methods are applicable. We use the simple iteration method:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[K_{i+1} \binom{s}{v} \left(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1} \right) - K_i \binom{s}{v} \left(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} \right) \right], \\ \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[B_{i+1} \binom{s}{u} \left(v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1} \right) - B_i \binom{s}{u} \left(v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1} \right) \right], \end{cases} \quad (28)$$

where $s = 0, 1, 2, \dots$.

It is known that iterative methods require an appropriate initial approximation, which ensures fast convergence to the exact solution and preserves the physical meaning of the problems. The above-obtained asymptotic formulas are chosen as appropriate initial approximations. The values of initial iteration for each time step u_i^{s+1} , v_i^{s+1} are taken from the previous time step: $u_i^{j+1} = u_i^j$, $v_i^{j+1} = v_i^j$. When counting by an iterative scheme, the accuracy of the iteration is set, for which the process continues until the following conditions are met

$$\begin{cases} \max_{0 \leq i \leq n} \left| u_i^{s+1} - u_i^s \right| < \varepsilon, \\ \max_{0 \leq i \leq n} \left| v_i^{s+1} - v_i^s \right| < \varepsilon. \end{cases}$$

Introduce the notations $\bar{u}_i = u_i^{j+1}$, $\bar{v}_i = v_i^{j+1}$. Then the difference equations (28) can be written as

$$\begin{cases} A_{1i} \bar{u}_{i-1} - C_{1i} \bar{u}_i + B_{1i} \bar{u}_{i+1} = -F_{1i}, \\ A_{2i} \bar{v}_{i-1} - C_{2i} \bar{v}_i + B_{2i} \bar{v}_{i+1} = -F_{2i}, \end{cases} \quad (29)$$

where A_{1i} , A_{2i} , B_{1i} , B_{2i} , C_{1i} , C_{2i} , F_{1i} , F_{2i} with formulas (27) are obtained in the form:

$$\begin{aligned} A_{1i} &= \frac{\tau}{h^2} K_i \binom{s}{u, v} = \\ &= \frac{\tau}{2h^2} \left(\left(v_i^{j+1} \right)^{m_1-1} \left| \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right|^{p-2} + \left(v_{i-1}^{j+1} \right)^{m_1-1} \left| \frac{u_{i-1}^{j+1} - u_{i-2}^{j+1}}{h} \right|^{p-2} \right), \\ A_{2i} &= \frac{\tau}{h^2} B_i \binom{s}{u, v} = \\ &= \frac{\tau}{2h^2} \left(\left(u_i^{j+1} \right)^{m_2-1} \left| \frac{v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}}{h} \right|^{p-2} + \left(u_{i-1}^{j+1} \right)^{m_2-1} \left| \frac{v_{i-1}^{j+1} - v_{i-2}^{j+1}}{h} \right|^{p-2} \right), \\ B_{1i} &= \frac{\tau}{h^2} K_{i+1} \binom{s}{u, v} = \\ &= \frac{\tau}{2h^2} \left(\left(v_{i+1}^{j+1} \right)^{m_1-1} \left| \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} \right|^{p-2} + \left(v_i^{j+1} \right)^{m_1-1} \left| \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right|^{p-2} \right), \\ B_{2i} &= \frac{\tau}{h^2} B_{i+1} \binom{s}{u, v} = \\ &= \frac{\tau}{2h^2} \left(\left(u_{i+1}^{j+1} \right)^{m_2-1} \left| \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{h} \right|^{p-2} + \left(u_i^{j+1} \right)^{m_2-1} \left| \frac{v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}}{h} \right|^{p-2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{1i} &= \frac{\tau}{h^2} \left(K_i(u, v) + K_{i+1}(u, v) \right) + 1, \\ \bar{C}_{2i} &= \frac{\tau}{h^2} \left(B_i(u, v) + B_{i+1}(u, v) \right) + 1, \\ \bar{F}_{1i} &= u_i^{j+1}, \\ \bar{F}_{2i} &= v_i^{j+1}. \end{aligned}$$

The values of the end ordinates at the ends of the segment can be obtained by the formula Milne:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 \approx \frac{-u_2 + 4u_1 - 3u_0}{2h}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_n \approx \frac{3u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{2h}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_0 \approx \frac{-v_2 + 4v_1 - 3v_0}{2h}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_n \approx \frac{3v_n - 4v_{n-1} + v_{n-2}}{2h}.$$

which are considered more accurate.

For the numerical solution of algebraic equations (29) applies the sweep method. According to the sweep method

$$\begin{cases} \bar{u}_i = \alpha_{1i} (\beta_{1i} + \bar{u}_{i+1}), \\ \bar{v}_i = \alpha_{2i} (\beta_{2i} + \bar{v}_{i+1}), \end{cases} \quad (30)$$

where α_{1i} , α_{2i} , β_{1i} , β_{2i} are the coefficients calculated by the formulas:

$$\begin{cases} \alpha_{1i+1} = \frac{B_{1i}}{C_{1i} - \alpha_{1i} A_{1i}}, \\ \alpha_{2i+1} = \frac{B_{2i}}{C_{2i} - \alpha_{2i} A_{2i}}, \\ \beta_{1i+1} = \frac{A_{1i} \beta_{1i} + F_{1i}}{C_{1i} - \alpha_{1i} A_{1i}}, \\ \beta_{2i+1} = \frac{A_{2i} \beta_{2i} + F_{2i}}{C_{2i} - \alpha_{2i} A_{2i}}, \end{cases}$$

where $i = 1, 2, \dots, n$. The values of α_{10} , α_{20} , β_{10} , β_{20} are found from boundary conditions (24). Using the above numerical schemes, a computational experiment was conducted. Here are some results of numerical experiments. The grid step is quite small $h = 0.05$, the number of nodes is $N = 2500$, and the accuracy of the iteration is specified as $\varepsilon = 10^{-5}$. The counting was carried out up to $t = 2$ with step $\tau = 0.02$. Formulas (10), (14) were taken as the initial approximation for the iterative process.

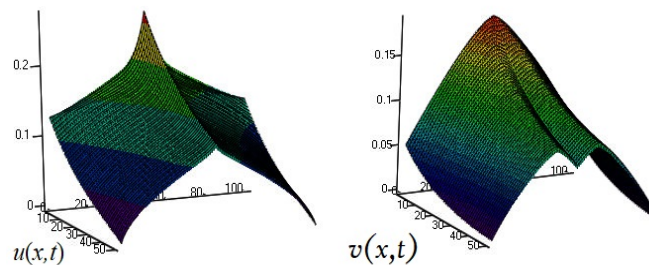


Figure 1 Numerical solution of the problem (1)-(3) at $q_1 = 2.25$, $q_2 = 2.25$, $p = 3.75$, $m_1 = 1.95$, $m_2 = 1.35$.

In fig. Figure 1 shows graphs of numerical results, starting from $t = 0.3$ in $v(x, t)$ a structure appears. The penetration depth of the two components is compatible.

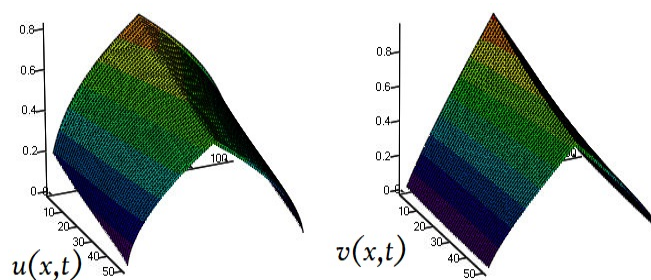


Figure 2 Numerical solution of the problem (1)-(3) at $q_1 = 2.75$, $q_2 = 2.95$, $p = 3.25$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1.6$.

In this case, the penetration depth for $u(x, t)$ and $v(x, t)$ is almost the same.

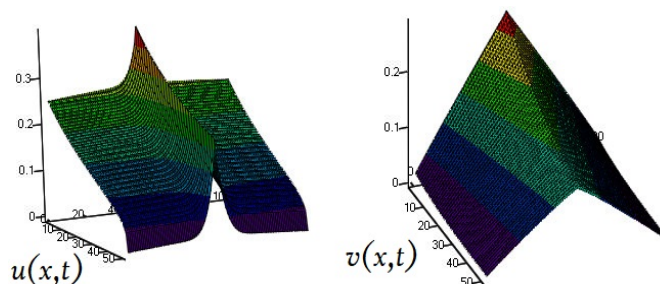


Figure 3 Numerical solution of the problem (1)-(3) at $q_1 = 2.3$, $q_2 = 2.2$, $p = 3$, $m_1 = 1.9$, $m_2 = 1.4$.

The results of numerical experiments show that the penetration depth for $u(x, t)$ is 5 times less than $v(x, t)$.

4 Conclusion

Figs. 1-3, show the results of numerical solution of problem (1) - (3) at $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$ corresponding to the case of slow diffusion. At $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$, as follows from the asymptotic formulas (10), (14) and graphs, the object moves with a finite velocity. The depth of penetration of a diffusion wave depends on time and the wave front (the point at which $\underline{u}(x, t)$, $\underline{v}(x, t)$ vanish) for each medium located at the end point: $x_\varphi = a^{(p-1)/p} (T + t)^\beta < \infty$.

The results of numerical experiments show a fast convergence of the iterative process due to the successful choice of the initial approximation. Thus, the proposed method makes it possible to solve the problem of choosing a suitable initial approximation.

References

- [1] Nie Y-Y, Thomée V.. 1985. A lumped mass finite-element method with quadrature for a non-linear parabolic problem. *IMA J. Numer. Anal.* 5 371–396. doi: <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/5.4.371..>
- [2] Vanag V. K., Epstein I. R.. 2009. Cross-diffusion and pattern formation in reaction-diffusion systems. *Phys. Chem. Chem. Phys.* 11 897–912. doi: <http://dx.doi.org/10.1039/B813825G>.
- [3] Elliott C. M., Stuart A.M.. 1993. The global dynamics of discrete semilinear parabolic equations. *SIAM J Num. Anal.* 30 1622–1663. doi: <http://dx.doi.org/10.1137/0730084>.
- [4] Gerisch A., Chaplain M.A.J.. 2006. Robust numerical methods for taxis–diffusion–reaction systems: applications to biomedical problems. *Math. Comp. Mod.* 43 49–75. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2004.05.016>.
- [5] Hittmeir S., Jüngel A.. 2011. Cross diffusion preventing blow-up in the two-dimensional Keller–Segel Model. *SIAM J Math. Anal.* 43 997–1022. doi: <http://dx.doi.org/10.1137/100813191..>
- [6] Hoff D.. 1978. Stability and convergence of finite difference methods for systems of nonlinear reaction-diffusion equations. *SIAM J Num. Anal.* 15 1161–1177. doi: <http://dx.doi.org/10.1137/0715077>.
- [7] Dziuk G., Elliott C. M.. 2013. Finite element methods for surface PDEs. *Acta Numer* 22. 289–396. doi: <http://dx.doi.org/10.1017/s0962492913000056>.
- [8] Aripov, M.M.. 1988. *Metodi etalonnix uravneniy dlya resheniya nelineynix krayevix zadach. [Methods of reference equations for solving nonlinear boundary value problems]*. Tashkent, Fan. (in Russian)
- [9] Kalashnikov A.S.. 1987. Nekotorie voprosi kachestvennoy teorii nelineynix virojdayushixsya parabolicheskix uravneniy vtorogo poryadka. [Some questions of the qualitative theory of nonlinear second order degenerate parabolic equations.] *UMN* V.42, Iss. 2 (254), 135–176. (in Russian)
- [10] Wu Z.Q., Zhao J.N., Yin J.X. and Li H.L.. 2001. *Nonlinear Diffusion Equations, Singapore*.: World Scientific
- [11] Levine H.. 1990. The role of critical exponents in blowup theorems *SIAM Rev.* 32(2), 262–288.
- [12] Murray J.D.. 2002–2003. *Mathematical Biology*. 3rd ed., Berlin: Springer.
- [13] Malchow H, Petrovskii SV., Venturino E.. 2008. *Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulations*. London: Chapman and Hall/CRC Press
- [14] Tsyganov M. A., Biktashev V. N., Brindley J., Holden A. V., Ivanitsky G. R.. 2007. Waves in cross-diffusion systems – a special class of nonlinear waves. *UFN* vol. 177, issue 3, 275–300. doi: <http://dx.doi.org/10.1070/PU2007v050n03ABEH006114>.
- [15] Aripov M.M., Matyakubov A. S. 2017. To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form of polytrophic filtration in variable density. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics* 8(3), 317–322. doi: <http://dx.doi.org/10.17586/2220-8054-2017-8-3-317-322>.
- [16] Aripov M.M., Matyakubov A. S. 2017. Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density: explicit estimates and asymptotic behavior. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics* 8(1), 5–12. doi: <http://dx.doi.org/10.17586/2220-8054-2017-8-1-5-12>.
- [17] Frittelli Massimo, Madzvamuse Anotida, Sgura Ivonne, Venkataraman Chandrasekhar. 2017. Lumped finite elements for reaction–cross-diffusion systems on stationary surfaces.

- Computers and Mathematics with Applications* 74 3008–3023 doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2017.07.044>.
- [18] Francesco M. Di, Esposito A., Fagioli S.. 2018. Nonlinear degenerate cross-diffusion systems with nonlocal interaction. *Nonlinear Analysis* 169, 94–117. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2017.12.003>..
- [19] Gerstenmayer Anita, Jüngel Ansgar. 2018. Analysis of a degenerate parabolic crossdiffusion system for ion transport. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, Nonlinear Analysis* 461(1), 523–543. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.01.024>.
- [20] Quiros F., Rossi J. D.. 2001. Blow-up set and Fujita-type curves for a degenerate parabolic system with nonlinear conditions. *Indiana Univ Math J.* 50: 629–654.
- [21] Rakhmonov Z. R.. 2016. Osenki resheniy nelineynoy sistemi uravneniy teploprovodnosti s peremennoy plotnostyu i s nelokalnim granichnim uslovиеm. [Estimates for solutions of a nonlinear system of heat conduction equations with variable density and with a non-local boundary condition.] *Vestnik NUUZ [Vestnik NUUZ]* 1 (2), 2016, 145–154. (in Russian)
- [22] Rakhmonov Z. R.. 2016. On the properties of solutions of multidimensional nonlinear filtration problem with variable density and nonlocal boundary condition in the case of fast diffusion. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics* 9(2), 236–245. doi: <http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-2-225-234>.
- [23] Rakhmonov Z. R., Urumbayev J. E.. 2019. On a Problem of Cross-Diffusion with Nonlocal Boundary Conditions. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics* 5, 614–620. doi: <http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-5-614-620>.
- [24] Wang S., Xie C. H., Wang M. X.. 1998. Note on critical exponents for a system of heat equations coupled in the boundary conditions. *J Math Analysis Applic* 218: 313–324.
- [25] Wang S., Xie C. H., Wang M. X.. 1999. The blow-up rate for a system of heat equations completely coupled in the boundary conditions. *Nonlinear Anal* 35: 389–398.
- [26] Zheng S. N., Song X. F., Jiang Z. X.. 2004. Critical Fujita exponents for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux. *J Math Anal Appl* 298: 308–324. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.05.017>.

Received February 13, 2020

УДК 517.957

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КРОСС ДИФФУЗИИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Урунбаев Ж. Э.

u-jasur@samdu.uz

Самаркандский Государственный университет,

140104 Узбекистан, г. Самарканд, ул. Университетский бульвар 15.

В работе исследуется асимптотика автомодельных решений нелинейной кросс диффузии системы, связанной с нелокальными граничными условиями. Построены различные автомодельные решения задачи для случая медленной диффузии, являющиеся асимптотикой решений рассматриваемой задачи. Получен главный член асимптотики автомодельных решений. Для численного исследования рассматриваемой задачи предложен способ выбора оптимального начального приближения для

итерационного процесса. Используя асимптотические формулы в качестве начального приближения для итерационного процесса, произведены численные расчеты. Результаты расчета визуализированы по времени и проведены анализ результатов.

Ключевые слова: кросс диффузии, асимптотика, нелинейные граничные условия, начальные приближения, численный анализ

Цитирование: Урунбаев Ж. Э. Численное моделирование процесса кросс диффузии с нелокальными граничными условиями // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 133–145.

Литература

- [1] Nie Y-Y, Thomée V.. 1985. A lumped mass finite-element method with quadrature for a non-linear parabolic problem. IMA J. Numer. Anal. 5 371–396. doi: <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/5.4.371..>
- [2] Vanag V. K., Epstein I. R.. 2009. Cross-diffusion and pattern formation in reaction-diffusion systems. Phys. Chem. Chem. Phys. 11 897–912. doi: <http://dx.doi.org/10.1039/B813825G>.
- [3] Elliott C. M., Stuart A. M.. 1993. The global dynamics of discrete semilinear parabolic equations. SIAM J Num. Anal. 30 1622–1663. doi: <http://dx.doi.org/10.1137/0730084>.
- [4] Gerisch A., Chaplain M. A. J.. 2006. Robust numerical methods for taxis–diffusion–reaction systems: applications to biomedical problems. Math. Comp. Mod. 43 49–75. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2004.05.016>.
- [5] Hittmeir S., Jüngel A.. 2011. Cross diffusion preventing blow-up in the two-dimensional Keller–Segel Model. SIAM J Math. Anal. 43 997–1022. doi: <http://dx.doi.org/10.1137/100813191..>
- [6] Hoff D.. 1978. Stability and convergence of finite difference methods for systems of nonlinear reaction-diffusion equations. SIAM J Num. Anal. 15 1161–1177. doi: <http://dx.doi.org/10.1137/0715077>.
- [7] Dziuk G., Elliott C. M.. 2013. Finite element methods for surface PDEs. Acta Numer 22. 289–396. doi: <http://dx.doi.org/10.1017/s0962492913000056>.
- [8] Арипов М. М.. 1988. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач.. Ташкент, Фан.
- [9] Калашников А. С.. 1987. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. УМН т.42, Вып.2 (254) 135–176.
- [10] Wu Z. Q., Zhao J. N., Yin J. X. and Li H. L.. 2001. Nonlinear Diffusion Equations, Singapore: World Scientific
- [11] Levine H.. 1990. The role of critical exponents in blowup theorems SIAM Rev. 32(2), 262–288.
- [12] Murray J. D.. 2002–2003. Mathematical Biology. 3rd ed., Berlin: Springer.
- [13] Malchow H, Petrovskii S.V., Venturino E.. 2008. Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulations. London: Chapman and Hall/CRC Press
- [14] Tsyganov M. A., Biktashev V. N., Brindley J., Holden A. V., Ivanitsky G. R.. 2007. Waves in cross-diffusion systems – a special class of nonlinear waves. UFN vol. 177, issue 3, 275–300. doi: <http://dx.doi.org/10.1070/PU2007v050n03ABEH006114>.
- [15] Aripov M. M., Matyakubov A. S. 2017. To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form of polytrophic filtration in variable density. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics 8(3), 317–322. doi: <http://dx.doi.org/10.17586/2220-8054-2017-8-3-317-322>.

- [16] *Aripov M. M., Matyakubov A. S.* 2017. Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density: explicit estimates and asymptotic behavior. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics* 8(1), 5-12. doi: <http://dx.doi.org/10.17586/2220-8054-2017-8-1-5-12>.
- [17] *Frittelli Massimo, Madzvamuse Anotida, Sgura Ivonne, Venkataraman Chandrasekhar.* 2017. Lumped finite elements for reaction–cross-diffusion systems on stationary surfaces. *Computers and Mathematics with Applications* 74 3008–3023 doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2017.07.044>.
- [18] *Francesco M. Di, Esposito A., Fagioli S.* 2018. Nonlinear degenerate cross-diffusion systems with nonlocal interaction. *Nonlinear Analysis* 169, 94-117. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2017.12.003>.
- [19] *Gerstenmayer Anita, Jüngel Ansgar.* 2018. Analysis of a degenerate parabolic crossdiffusion system for ion transport. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, Nonlinear Analysis* 461(1), 523-543. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.01.024>.
- [20] *Quiros F., Rossi J. D.* 2001. Blow-up set and Fujita-type curves for a degenerate parabolic system with nonlinear conditions. *Indiana Univ Math J.* 50: 629–654.
- [21] *Рахмонов З. Р.* 2016. Оценки решений нелинейной системы уравнений теплопроводности с переменной плотностью и с нелокальным граничным условием. *Вестник НУУз* №1 (2), 2016, 145-154.
- [22] *Rakhmonov Z. R.* 2016. On the properties of solutions of multidimensional nonlinear filtration problem with variable density and nonlocal boundary condition in the case of fast diffusion. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics* 9(2), 236–245. doi: <http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-2-225-234>.
- [23] *Rakhmonov Z. R., Urunbayev J. E.* 2019. On a Problem of Cross-Diffusion with Nonlocal Boundary Conditions. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics* 5, 614-620. doi: <http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-5-614-620>.
- [24] *Wang S., Xie C. H., Wang M. X.* 1998. Note on critical exponents for a system of heat equations coupled in the boundary conditions. *J Math Analysis Applic* 218: 313–324.
- [25] *Wang S., Xie C. H., Wang M. X.* 1999. The blow-up rate for a system of heat equations completely coupled in the boundary conditions. *Nonlinear Anal* 35: 389–398.
- [26] *Zheng S. N., Song X. F., Jiang Z. X.* 2004. Critical Fujita exponents for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux. *J Math Anal Appl* 298: 308–324. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.05.017>.

Поступила в редакцию 13.02.2020

УДК 004

АРГУМЕНТАЦИЯ КАТЕГОРНОГО ОПИСАНИЯ СОХРАНЕНИЯ ЦЕЛОСТНОСТИ ДАННЫХ В БАЗОВОЙ СТРУКТУРЕ ОБЛАЧНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Турсунов Н.Х.

ntursunov@gmail.com

Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий,
100124, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улугбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А.

Обеспечение целостности данных в облачных информационных системах гарантирует корректную работу всей системы в целом. Применение абстрактного математического аппарата в виде категорий создает теоретическую базу для исследования обеспечения целостности данных. Обеспечение целостности данных облачных систем достигается путем решения множества задач, среди которых доминирующим является обеспечение целостности доменов, целостности таблиц и ссылочной целостности. В статье для решения этих задач рассматривается применимость методов теории категорий, а именно приводится аргументация категорного описания задач сохранения целостности доменов, таблицы и ссылочной целостности. Категорное описание позволяет представить облачную информационную систему в виде динамической системы. В динамической системе в качестве объекта исследования рассматриваются процессы в виде морфизмов, в частности морфизмы в виде отображений.

Ключевые слова: облачная информационная система, категорное описание, сохранение целостности данных, целостность домена, целостность таблицы, ссылочная целостность, морфизм, отображение.

Цитирование: *Турсунов Н.Х.* Аргументация категорного описания сохранения целостности данных в базовой структуре облачных информационных систем // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 146–153.

1 Введение

Необходимые ресурсы электронных библиотек, машинного обучения и искусственного интеллекта хранятся в базах данных (БД). БД является универсальным хранилищем информации во всех автоматизированных информационных системах. В последнее время БД представляется как облачный сервис облачной информационной системы (ОИС). ОИС, как одна из последних парадигм распределенной обработки данных, вплотную входят в нашу жизнь[1]. Облачные информационные системы обеспечивают легкий и удобный доступ к общим вычислительным ресурсам через интернет. В качестве вычислительных ресурсов рассматриваются сети передачи данных, серверы, устройства хранения данных, прикладные программы, сервисные приложения и др. В области облачных вычислений большинство поставщиков услуг не только предоставляют доступ к платформам облачных вычислений, но и создают специализированные системы облачных вычислений, которые отвечают технологическим и нормативным требованиям заказчика. ОИС имеют ряд преимуществ[2], а именно повышение гибкости и скорости реагирования системы. Затрачивается меньше времени на инициацию, настройку, отслеживание и формирование облачных сред.

Возможен моментальный запуск приложения пользователя на любой вычислительной аппаратной инфраструктуре, а если подобного виртуального сервера нет, то можно скачать готовую виртуальную машину с установленным и настроенным сервером из библиотек, заранее подготовленных по требованиям пользователей. Повышена доступность приложений и обеспечена непрерывность работы виртуальных сред ОИС. Использование программной настройки повышает управляемость инфраструктуры ОИС. Данная система сокращает время на администрирование серверов, обеспечивает балансировку нагрузки и оперативную миграцию виртуальных машин. Перечень ее недостатков отражен в работах [3, 4].

Ядром ОИС является БД. В настоящее время наиболее распространены два способа разработки ОИС. Первый способ – на начальном этапе разрабатывается базовая форма ОИС, а затем она трансформируется в облачный сервис. Во втором способе сначала формируется вид облака, а в дальнейшем все разработки реализуются в облаке [5]. В обоих случаях: и при разработке, и в развёртывании ОИС- необходимо обеспечить сохранение целостности информации в БД. Целостность данных означает, что все данные, накопленные в БД ОИС, собраны в соответствии с некоторым заранее установленным правилом и не противоречат друг другу. В современных БД широко используется система управления БД реляционного типа [6]. Реляционная модель в реляционной БД имеет состав установленных правил для обеспечения целостности данных. Правила служат для обеспечения целостности информации в реляционной БД. В качестве этих правил можно рассматривать ограничение домена, ограничения таблицы и ссылочное ограничение.

В связи с отсутствием теоретической аргументации сохранения целостности данных в базовой структуре ОИС предлагаем категорное описание, как универсальный метод изложения сохранения целостности данных в ОИС.

В последнее время наблюдается тенденция увеличения научно-исследовательских работ по применению теории категорий в различных сферах естествознания, в том числе при исследовании проблем информационной технологии. Теорией категорий и ее применением занимались такие ученые, как Цаленко М.С., Шультгейфер Е.Г., Плоткин Б.И., Левич А.П., Ершов А.В., Манин Ю.И., Гротендик А., из зарубежных: Bucur I., Deleanu A., Adamcu J., Herrlich A., Strelker G., Borceux F., MacLane S., Rolly G., Barr M., Welle Ch. и многие другие.

В частности, работа [7] посвящена применению теории категорий для решения проблем из области компьютерных наук. Создаётся категория алгоритмов со значениями входных и выходных переменных. В работе [8] аргументируется применение теории категорий во всех направлениях современной математики. Приводятся многочисленные примеры из различных разделов математики, где можно применить теория категорий.

2 Постановка задачи

Введем понятие категории следующим образом [9]. Пусть задано множество объектов $K_o = \{K_{o_1}, K_{o_2}, \dots, K_{o_m}, \dots\}$ и K_M - множество морфизмов между объектами K_o , т.е. $K_M = \{H_{K_o}(K_{o_i}, K_{o_j})\}$, где $H_{K_o}(K_{o_i}, K_{o_j})$ - морфизмы между элементами $K_{o_i}, K_{o_j} \in K_o$. Тогда совокупность множеств K_o и K_M называется категориями K , если выполняются следующие условия:

1. $\forall A, B \in K_o \rightarrow H_{K_o}(A, B) \in K_M$.
2. Каждый морфизм из K_M принадлежит одному и только одному из множеств $H_{K_o}(A, B)$.

3. В классе K_M введен частный внутренний закон композиции, т.е. произведение $\alpha * \beta$ морфизма $\alpha \in H_{K_o}(A, B)$ на морфизм $\beta \in H_{K_o}(C, D)$ определено тогда и только тогда, когда объект B совпадает с объектом C . В этом случае $\alpha, \beta \in H_{K_o}(A, D)$. Композиция морфизмов ассоциативна: $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$.
4. В каждом множестве $H_{K_o}(A, A)$ содержится морфизм 1_A , называемый тождественным или единичным морфизмом объекта A такой, что $\alpha * 1_A = \alpha$ и $1_A * \beta = \beta$ для всех $\alpha \in H_{K_o}(X, A)$ и $\beta \in H_{K_o}(B, Y)$, где $A, X, Y \in K_o$.

Понятие морфизм является более общим понятием, означающим взаимодействие между объектами. Морфизм в зависимости от рассматриваемой ситуации может быть соответствием, отображением, изоморфизмом, гомоморфизмом и т.д.

Задачей данной статьи является: показать применимость категорного описания для решения проблемы сохранения целостности данных в базовой структуре ОИС.

3 Методы решения

3.1 Аргументация категорного описания ограничения домена в реляционной БД

Основу реляционной модели образует понятие «отношение» [6]. Отношение определяется как подмножество декартового произведения доменов. Домен – это множество определенных отношений. Элементу отношений свойственны некоторый признак или свойство. В качестве морфизма рассматривается отображение.

Предположим, заданы домены $D_1, D_2, \dots, D_n$. Их декартовое произведение D определяется следующим образом: $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$. Здесь $D_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}\}$ и $1 \leq i \leq n$. $\forall d \in D$ называется кортежем из n элементов и определяется как $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, где $d_i \in D_i, 1 \leq i \leq n$.

Классически отношение R в декартовом произведении D определяется как $R \subset D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$. То есть отношение есть множество кортежей, которые состоят из n элементов. По другому, элементы отношений есть кортежи. Количество элементов кортежа определяет размерность отношений. Если кортеж состоит из n элементов, то отношение R тоже состоит из n элементов. Поскольку отношение есть множество, то оно не должно иметь два одинаковых кортежа. Кроме того, совершенно не важно, в каком порядке в отношении расположены кортежи. В реляционной БД отношение удобно представить в виде таблицы. Столбец этой таблицы соответствует домену, а домен есть компонент декартового произведения. Каждая строка есть кортеж, длина которого соответствует количеству доменов в декартовом произведении. Таблица, отображающая отношение, имеет следующие свойства:

1. каждая строка есть кортеж, состоящий из элементов, и каждый элемент принадлежит соответствующему домену;
2. порядок столбцов установлен заранее;
3. произвольные две строки отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

По смыслу операций обработки данных, кортежи могут обрабатываться в любом порядке. Предположим, задано отображение $f : D \rightarrow N$, т.е. отображение f отображает декартовое произведение D на множество натуральных чисел N . В работе [10] доказано, что такое отображение является биективным отображением. Биективность отображения f обеспечивает сохранение целостности домена. Кроме того, для биективного отображения существует обратное отображение f^{-1} , которое также является биективным. Для f и f^{-1} верно $f * f^{-1} = 1_A$. Отсюда для отображения f существует единичное отображение. Теперь остается показать существование

композиции отображений. Пусть $\alpha \in H_{K_o}(A, B)$, $\beta \in H_{K_o}(B, C)$, $\gamma \in H_{K_o}(C, D)$. Это означает $A, B, C, D \in K_o$. Тогда $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma) : A \rightarrow D$, или $(\alpha * \beta) * \gamma, \alpha * (\beta * \gamma) \in H_{K_o}(A, D)$, где $A, B, C, D \in K_o$. Тем самым все условия категории выполнены.

Биективность отображения $f : D \rightarrow N$ означает, что существует первичный ключ, который взаимно однозначно идентифицирует строки таблицы. Этот ключ позволяет устанавливать такой порядок в таблице, что ее строки точно отличаются друг от друга, так как два значения натуральных чисел не совпадают.

Обеспечение целостности доменов означает, что межтабличные связи в БД реляционного типа надежны в строго определенном порядке. Обеспечение целостности данных в БД достаточно серьезная и сложная задача. Аргументация категорного описания означает, что к данному направлению исследования можно применить методы теории категории [11].

3.2 Аргументация категорного описания ограничения таблицы

Одним из внутренних ограничений целостности данных является целостность всей таблицы, т.е. каждая строка таблицы должна быть уникальной. Если относительно таблицы применить это ограничение, то каждая строка таблицы уникальным образом идентифицируется.

Для того чтобы задать целостность всей таблицы, во время ее создания необходимо определить один столбец или группу из нескольких столбцов в качестве первичного ключа. Уникальное значение ключевого поля должно участвовать в каждой строке таблицы. Это значит, что каждая строка имеет уникальное значение первичного ключа. Если имеется сложный ключ, то строка должна иметь группу значений столбцов. Значение ключевого поля не может быть NULL. Таблица может иметь только один первичный ключ. Во многих случаях программисты должны учитывать использование первичных ключей других таблиц. Для этого программист при создании таблицы вводит другой альтернативный или уникальный ключ. Альтернативные и уникальные ключи могут быть первичными ключами в своих таблицах.

Для аргументации целостности таблицы в реляционных БД поступим следующим образом. Пусть $S_1, S_2, \dots, S_n$ - столбцы реляционной таблицы, а $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ - декартово произведение этих столбцов. Для $g : S \rightarrow N$ отображение, которое отображает декартово произведение на множество натуральных чисел. В этих предположениях верно следующее утверждение: $(\eta * \mu) * \tau, \eta * (\eta * \tau) \in H_{K_o}(S^1, S^4)$.

Утверждение. Для того чтобы обеспечить целостность значений таблицы S , отображение g должно быть биективным.

Доказательство. Во-первых, $\forall s \in S, s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}, s_i \in S_i, 1 \leq i \leq n, \exists m \in N \Rightarrow m = g(s)$. То есть отображение g - инъективное отображение, потому что таблица S состоит из множества кортежей и для любого кортежа можно найти соответствующее число из множества N . Во-вторых, для $\forall s^1, s^2 \in S$ и $s^1 \neq s^2 \Rightarrow m_1 = g(s^1) \neq m_2 = g(s^2)$. То есть отображение g - сюръективное отображение, потому что таблица состоит из множества кортежей, и два произвольных кортежа отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. По свойству реляционных баз данных, в таблице строки с совпадающими значениями не может быть.

Из-за инъективности и сюръективности отображения g следует ее биективность. Утверждение доказано. Важное следствие этого утверждения в том, что в таблице определяется первичный ключ, с помощью которого устанавливается порядок в

таблице. Этот установленный порядок отвечает за сохранение целостности значений таблицы.

Дальнейшее рассуждение аналогично сохранению целостности домена. Для биективного отображения существует обратное отображение g^{-1} , которое также является биективным. Для g и g^{-1} верно $g * g^{-1} = 1_A$. Отсюда для отображения существует единичное отображение. Теперь остается показать существование композиции отображений. Пусть $\eta \in H_{K_o}(S^1, S^2)$, $\mu \in H_{K_o}(S^2, S^3)$, $\tau \in H_{K_o}(S^3, S^4)$, где S^i - i -й объект из множества объектов K_o . Это означает, что $C = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$, $S^1, S^2, S^3, S^4 \in K_o$. Тогда $(\eta * \mu) * \tau = \eta * (\mu * \tau) : S^1 \rightarrow S^4$ или $(\eta * \mu) * \tau, \eta * (\mu * \tau) \in H_{K_o}(S^1, S^4)$, где $S^1, S^2, S^3, S^4 \in K_o$. Эти выкладки позволяют утверждать, что и здесь применимы методы теории категории.

3.3 Аргументация сохранения ссылочного ограничения или ссылочной целостности данных в реляционных БД

Целостность сохранения данных - еще одно элементарное правило стандартной модели доверия. Целостность ассоциации определяет связь между различными столбцами таблицы и таблицей реляционной БД. Это имя происходит от ссылки или совпадения со столбцом значения столбца или с несколькими столбцами. При описании целостности ссылки встречается ряд новых терминов. Столбец (или столбцы), который связывается с другой таблицей, называется внешним ключом. В этом случае столбец должен быть родительским ключом (или первичным, или уникальным ключом), который направляет таблицу в другую таблицу. Внешний ключ или расширение находится в таблице, а наследственный ключ находится в наследственной таблице. Если происхождение и внешний вид находятся в пределах одной таблицы, это называется закрытой связью (самостоятельностью).

Аргументация обеспечения ссылочной целостности в реляционной БД базируется на понятии «отношение». Отношения есть подмножества декартового произведения доменов. Домен представляет собой некоторое множество элементов, и элементы добавляются в это множество в соответствии с заранее определенными свойствами.

Допустим, заданы домены $N_1, N_2, \dots, N_n$, и их декартовое произведение C определяется в виде $C = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$. Здесь $C_i = \{c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}\}$, где $1 \leq i \leq n$. $\forall c \in C$ называется кортежем из n элементов и для него верно $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $c_i \in C_i$, $1 \leq i \leq n$. Вводится понятие отношения R как $R \subset C = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$. То есть отношение есть подмножества декартового произведения доменов и является множеством из n -мерных кортежей. Количество элементов кортежа определяет количество элементов отношения. В реляционной БД отношение представляется в виде таблицы. Столбец этой таблицы соответствует домену, являющемуся компонентом декартового произведения. Каждая строка есть кортеж, длина которого соответствует количеству доменов. Так как отношение - это множество, поэтому не допускаются два одинаковых элемента. Введем отображение $\delta : C \rightarrow N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$. Оно отображает декартовое произведение доменов на декартовое произведение натуральных чисел. Для каждого N_i должно быть верно отображение $\varphi : C_1^i \times C_2^i \times \dots \times C_n^i \rightarrow N_i$, где C_k^i - домены первичной таблицы, а N_i - множество значений внешнего ключа. В свою очередь, N_i есть первичный ключ для таблиц, где участвуют домены C_k^i . Здесь $1 \leq k \leq n$. Из этих рассуждений следует, что верность отображения δ является гарантом ссылочной целостности в таблицах реляционных БД.

Одной из наиболее важных функций реляционной БД является способность взаимосвязать друг с другом данные разных таблиц и обеспечить применение ссылочной целостности данных в базовой структуре ОИС. Сервер управления реляционной БД

эффективно хранит данные благодаря возможности взаимосвязать данные различных таблиц. Эта опция уменьшает переполнение данных в таблицах БД. Чрезмерное количество информации и отсутствие данных в таблицах вызывают проблему нарушения целостности данных.

Ссылочная целостность гарантирует, что каждое значение внешнего ключа соответствует значению наследственного ключа. Таким образом, ссылочная целостность не только определяет потенциальные значения внешнего ключа, а также обеспечивает целостность манипуляций при выполнении операций с наследственным ключом. Например, пусть в некоторой таблице задаются два ограничения ссылочной целостности. Первое ссылочное ограничение - это обращение к другой таблице, которое через приложение обеспечивает каскадное удаление этой ссылочной целостности. Эта операция не может быть выполнена, так как для удаления строки, соответствующей наследственному ключу, необходимо удалить все строки, связанные с ключом потомка.

Отображение доменом самого себя соответствует требованиям единичного морфизма. Единичное отображение не меняет структуры домена. Композиция отображений определяется следующим образом. Если рассматривать домен как множество, то для двух множеств A и B под $H_{K_O}(A, B)$ понимается множество всех отображений $A \rightarrow B$, а под композицией $\delta * \varphi$ - обычная композиция отображений [9]. В этом случае K_O и K_M совместно образуют категорию. Значит, категорный подход и для исследования обеспечения ссылочной целостности также применим.

4 Выводы

Таким образом, в данной статье рассмотрена аргументированность категорного описания сохранения целостности данных в базовой структуре ОИС. Аргументация проводится в основных трех ключевых направлениях сохранения целостности данных: сохранение целостности доменов, сохранение целостности таблицы и сохранение ссылочной целостности таблицы БД реляционного типа. Из изложенных выше рассуждений и доказанных утверждений делаем следующие выводы. Целостность домена гарантирует, что БД ОИС не содержит бессмысленных данных. Следовательно, значения в столбце есть значения столбца домена, т.е. образуется множество возможных значений домена. Другими словами, строка таблицы не включается в таблицу, если каждый элемент строки не принадлежит соответствующему домену столбца. Кроме того, значения в таблице должны отличаться, по крайней мере, для одного элемента, чтобы обеспечить целостность домена. То есть запрещается иметь повторяющиеся строки. Обеспечение целостности доменов означает, что межтабличные связи в БД реляционного типа надежные и находятся в строго определенном порядке.

Для сохранения целостности всей таблицы необходимо определить один столбец или группу нескольких столбцов в качестве первичного ключа. Уникальное значение ключевого столбца должно быть включено в каждую строку специальным образом. Это означает, что каждая строка должна иметь уникальное значение первичного ключа. Если у вас есть сложный ключ, то в этом случае столбцы должны иметь группу значений.

Обеспечение ссылочной целостности данных является одним из стандартных правил обеспечения целостности данных. Ссылочная целостность не только определяет потенциальные значения внешнего ключа, а также обеспечивает целостность манипуляций при выполнении операций с наследственным ключом.

По сути, в ОИС происходят динамические процессы с широким масштабированием и виртуализацией. С помощью категорного подхода исследованы динамические процессы в ОИС с акцентом на обеспечение сохранности целостности данных. Категорный подход позволил рассматривать компоненты ОИС как множество со структурой. Множество со структурой в зависимости от операций, введенных в нем создает алгебру, которые описывают свойств ОИС. Тем самым, этот подход позволяет привлечь к исследованию свойств ОИС развитые методы универсальной алгебры и является своеобразным мостом в этом направлении.

Литература

- [1] *Гребнев Е.* Облачные сервисы. Взгляд из России. – М.: Cnews, 2011. – 286 с.
- [2] *Риз Д.* Облачные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 281 с.
- [3] *Миронович В.* Обзор: Облачные вычисления. – URL: <http://www.ht.ua/pub/104309.html>.
- [4] *Фингар П.* Dot.Cloud: облачные вычисления - бизнес-платформа XXI века. – М.: Акваринарная книга, 2011. – 256 с.
- [5] *Ривкин М.* Как создаются облака // Открытые системы. СУБД. – 2012. – №4. – С. 22-27.
- [6] *Ульман Дж.* Основы системы баз данных. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 334 с.
- [7] *Barr M., Wells Ch.* Category theory for computer science // Reprints in Theory and Applications of Categories. – 2012. – №22. – 558 p.
- [8] *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. – М.: Мир, 1972. – 259 с.
- [9] *Маклейн С.* Категория для работающего математика. – М.: Физматлит, 2004. – 352 с.
- [10] *Турсунов Н.Х.* Теоретическое обоснование обеспечения целостности доменов в базовой структуре облачных информационных систем // Наука, техника и образование. – 2019. – №2(55). – С. 25-29.
- [11] *Awede S.* Category Theory. – Oxford : Oxford university press, 2010. – 328 p.

Поступила в редакцию 01.03.2020

UDC 004

THE ARGUMENTATION OF THE CATEGORICAL DESCRIPTION OF THE PRESERVATION OF DATA INTEGRITY IN THE BASIC STRUCTURE OF CLOUD INFORMATION SYSTEMS

Tursunov N.H.

ntursunov@gmail.com

Scientific-innovative center of information and communication technologies,
100124, 17A Buz-2, Mirzo-Ulugbek district, Tashkent, Uzbekistan.

Ensuring data integrity in cloud information systems ensures the correct operation of the entire system as a whole. The use of an abstract mathematical apparatus in the form of categories creates a theoretical basis for the study of data integrity. Ensuring the integrity of data in cloud systems is achieved by solving many problems, the dominant of which is ensuring the integrity of domains, table integrity, and referential integrity. To

solve these problems, the article discusses the applicability of category theory methods, namely, the argumentation of the categorical description of the problems of preserving the integrity of domains, tables and referential integrity is given. The categorical description allows you to imagine a cloud information system in the form of a dynamic system. In a dynamic system, processes in the form of morphisms, in particular morphisms in the form of mappings, are considered as an object of study.

Keywords: cloud information system, categorical description, preservation of data integrity, domain integrity, table integrity, referential integrity, morphism, mapping.

Citation: Tursunov N.H. 2020. The argumentation of the categorical description of the preservation of data integrity in the basic structure of cloud information systems. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(26):146–153.

Об издании

Научный журнал «Проблемы вычислительной и прикладной математики» основан в 2015 году.

Свидетельство о регистрации СМИ за № 0856 выдано 5 августа 2015 года Узбекским Агентством по печати и информации.

Периодичность выхода – 6 выпусков в год.

Тематика журнала включает в себя следующие основные направления:

- математическое моделирование физических, технических, биологических и социально-экономических систем;
- вычислительная математика и численные методы для решения прикладных задач;
- решение обратных и некорректно поставленных задач;
- интеллектуальный анализ данных, распознавание образов и обработка изображений;
- искусственный интеллект и технологии обработки баз знаний;
- технологии параллельных и распределенных вычислений;
- технологии программирования.

Правила для авторов

1. Правила подготовки и пример оформления статей можно загрузить с веб-страницы журнала <http://www.pvpm.uz>
2. Подготовленные файлы статей и экспертных заключений отправлять на адрес: submission@pvpm.uz
3. Статьи, оформленные без соблюдения правил, к рассмотрению не принимаются.
4. Представленные в редакцию рукописи авторам не возвращаются.
5. Плата с авторов за публикацию статей не взимается, и гонорары авторам не выплачиваются.